

Matematyka w ORATORIUM

Zajęcia nr. 1

www.hope.art.pl/kurs

26 lutego 2009 r.

1 Zestaw I

Zadanie 1.1. Określ czy dany ciąg jest arytmetyczny, geometryczny, zbieżny, ograniczony, monotoniczny:

(a) $a_n = 2 \cdot 2^n$

(b) $b_n = 6n - 7$

(c) $c_n = \sqrt[2n]{4^n}$

(d) $d_n = 3^n + 3$

(e)
$$\begin{cases} e_0 = 0 \\ e_{n+1} = 2 \cdot e_n \end{cases}$$

(f)
$$\begin{cases} f_0 = 1 \\ f_{n+1} = 2 + f_n \end{cases}$$

Zadanie 1.2. Niech $x_1 \neq x_2$ oznaczają pierwiastki równania $-x^2 = -6mx + 5m^2$, gdzie m jest parametrem rzeczywistym. Znajdź taką wartość parametru m dla której wyrażenie $x_1^2 + x_2^2$ osiąga największą wartość.

Zadanie 1.3. Dla jakich wartości parametru m równanie:

$$4^x + 4m \cdot 2^x + 4m^2 = 0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Zadanie 1.4. Niech (Ω, P) będzie przestrzenią probabilistyczną. Niech $A, B \subset \Omega$ będą pewnymi zdarzeniami niezależnymi o niezerowym prawdopodobieństwie. Czy zdarzenia te mogą być rozłączne?

Zadanie 1.5. Rozwiąż nierówność:

$$5^{\log_{\frac{1}{5}} x} \geq 5x$$

Zadanie 1.6. Niech będą dane zbiory:

$$A = \{x : |\sin x| = 1\} \quad B = \{x : \frac{2x}{\pi} \in \mathbb{C}\}$$

$$C = \{x : x^2 \leq 0\}$$

Wyznacz:

(a) $A \cup B$

(c) $A \setminus B$

(e) $A \cup C$

(g) $A \cup (B \cap C)$

(b) $A \cap B$

(d) $A \cap C$

(f) $(A \cup B) \cap C$

(h) $(A \cup B) \cap B$

Zadanie 1.7. Korzystając z odpowiedniej definicji, pokaż, że funkcja $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$ jest malejąca. Czy funkcja $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $g(x) = \frac{1}{x}$ jest malejąca?

Zadanie 1.8. Niech liczby $4, 15, m$ będą bokami pewnego trójkąta. Niech funkcja f przypisuje podanej liczbie wartość obwodu tego trójkąta, przy czym nieznany bok m otrzymuje wartość argumentu funkcji f . Wyznacz dziedzinę funkcji f .

Zadanie 1.9. Dane są punkty $A = (0, 0)$, $B = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $C = (\sqrt{3}, 3\sqrt{5})$. Znajdź współrzędne punktu D , tak by aby punkty $ABCD$ były wierzchołkami pewnego równoległoboku.

Zadanie 1.10. Sześcian o boku a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem $\frac{\pi}{6}$ radianów. Wykonaj odpowiedni rysunek, a następnie oblicz pole otrzymanego przekroju. (**Wersja trudniejsza:** kąt jest parametrem α – podaj ogólny wzór na pole przekroju.)

2 Zestaw II

Zadanie 2.1 (4 punkty). Niech $f(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$.

a) Naszkicuj wykres f .

b) Rozwiąż równanie $f(x) = 1$.

Zadanie 2.2 (5 punktów). Sześcian o krawędzi podstawy a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem $\frac{\pi}{3}$. Sporządź odpowiedni rysunek. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

Zadanie 2.3 (10 punktów). Dane jest równanie: $x^2 + (m - 5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$. Zbadaj dla jakich wartości parametru m stosunek sumy pierwiastków rzeczywistych równania do ich iloczynu przyjmuje wartość najmniejszą. Wyznacz tę wartość.

Zadanie 2.4 (4 punkty). Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} |x| - y = 1 \\ x^2 + (y + 1)^2 = 8 \end{cases}$$

Zadanie 2.5 (4 punkty). Dany jest ciąg trójkątów równobocznych takich, że bok następnego trójkąta jest wysokością poprzedniego. Oblicz sumę pól wszystkich tak utworzonych trójkątów, przyjmując, że bok pierwszego trójkąta ma długość a ($a > 0$).

Zadanie 2.6 (4 punkty). Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie w sposób:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Wykaż, korzystając z zasady indukcji matematycznej, że ciąg (a_n) można określić za pomocą wzoru ogólnego $a_n = \frac{2}{2n-1}$, gdzie $n \geq 1$.

Zadanie 2.7 (5 punktów). Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_x(4^x - 12 \cdot 2^x + 32)$.

Zadanie 2.8 (9 punktów). Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ oraz prosta l nachylona do osi OX pod kątem α , którego sinus jest równy $0,6$.

a) Oblicz współczynnik kierunkowy prostej l .

b) Podaj wszystkie punkty x z dziedziny funkcji f , takie, że styczne do wykresu f w punktach $(x, f(x))$ są równoległe do prostej l .

Zadanie 2.9 (3 punkty). Prawdopodobieństwa zdarzeń losowych A i B są równe: $P(A) = 0,8$ oraz $P(B) = 0,5$. Uzasadnij, że prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B)$ jest nie mniejsze niż $0,6$.