

Zajęcia nr. 2 – notatki

21 kwietnia 2005

1 Wzory skróconego mnożenia

W rozdziale tym podamy kilka wzorów które ułatwiają obliczanie wielu zadań rachunkowych.

Fakt 1.1 (wzory skróconego mnożenia). *Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi:*

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Uwaga 1.2. Istnieją również wzory skróconego mnożenia dla potęg wyższych niż 2. W szczególności, często będziemy korzystać z wzorów, w których występują wyrażenia w 3 potęgde. W następnym podrozdziale omówimy takie wzory.

Uwaga 1.3. Jeśli kiedykolwiek zdarzy Ci się zapomnieć któryś z wzorów skróconego mnożenia, możesz w bardzo prosty sposób wyprowadzić go sobie. Wyprowadźmy dla przykładu wzór na $(a + b)^2$. Po pierwsze trzeba zapisać kwadrat jako iloczyn, czyli $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$, a następnie po prostu wymnożyć nawiasy, czyli: $(a + b)(a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$. Po uporządkowaniu otrzymanego wyrażenia dostajemy nasz wzór. W ten sposób można również wyprowadzić dowolne wzory skróconego mnożenia (dla dowolnej potęgi), jednak jest to bardzo czasochłonne (jeśli potęga jest duża).

2 Wzór Newtona

W tym rozdziale podamy uogólnione wzory skróconego mnożenia, które pozwalają obliczyć wyrażenia postaci: $(a + b)^n$, gdzie n jest liczbą naturalną.

2.1 Silnia

Aby wprowadzić uogólnione wzory skróconego mnożenia, musimy najpierw zdefiniować silnię, która będzie pojawiać się we wzorze na symbol Newtona. Zaczniemy od formalnej definicji.

Definicja 2.1 (silnia). Silnię nazywamy funkcję f , której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych, oraz która spełnia następujące warunki:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n + 1) = f(n) \cdot (n + 1) \end{cases}$$

Zwyczajowo piszemy $n!$ zamiast pisać $f(n)$.

Formalna definicja silni może wydać się początkowo mało czytelna. Taka definicja jest bowiem przykładem definicji rekurencyjnej. Rekurencja, to sposób definiowania funkcji, lub ogólnie pojęć, który w treści definicji odwołuje się sam do siebie. Zauważym, że aby wyliczyć wartość silni dla jakiejś liczby naturalnej k , musimy najpierw poznać jej wartość dla liczby $k-1$ itd. Wydawać by się mogło, że taki zapis prowadzi jedynie do komplikacji. Nie zawsze tak jest. Czasem oczywiście podanie wzoru jawnego (zwykłego – nierekurencyjnego) jest możliwe i miarę proste. Czasem jednak nie da się w ogóle podać innego wzoru niż rekurencyjny, bądź wzór rekurencyjny okazuje być dużo wygodniejszy od innych.

Przykład 2.2. Policzmy dla przykładu, korzystając z wzoru rekurencyjnego, wartość $7!$:

$$\begin{aligned} 7! &= 6! \cdot 7 = 5! \cdot 6 \cdot 7 = 4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = \\ &= 3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = \\ &= 1! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 0! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040 \end{aligned}$$

Jak widać, musieliśmy się sporo namęczyć rozpisując z definicji poszczególne silnie. Na szczęście w praktyce nigdy tak nie liczymy silni.

Analizując powyższy przykład łatwo zauważyć pewną prawidłowość, która w dużym stopniu ułatwi obliczanie silni.

Uwaga 2.3 (obliczanie silni). Silnia liczby naturalnej $n > 0$ jest to iloczyn liczb $1, \dots, n$, czyli:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

Jako ciekawostkę można powiedzieć, że silnia jest funkcją bardzo szybko rosnącą. Jak widzieliśmy w przykładzie już $7!$ jest liczbą bardzo dużą. Dla przykładu poniżej podamy kilka wartości silni:

$$7! = 5040 \quad 14! = 87178291200 \quad 21! = 51090942171709440000.$$

Współcześnie używane kalkulatory mogą zazwyczaj policzyć silnię dla n równych około 60. Da się napisać programy komputerowe liczące silnie dowolnie dużych liczb, jednak domyślnie większość języków programowania nie obsługuje tak wielkich liczb (tzn. trzeba samemu wymyślić ich obsługę).

Problem 2.1. Jeśli potrafisz programować w którymś z języków programowania (np. Pascal, C, Java), to napisz dwie wersje funkcji liczącej silnię. Jedna niech będzie funkcją zdefiniowaną rekurencyjnie, druga iteracyjnie (np. z wykorzystaniem pętli for). Sprawdź jak duże wartości silni można wyliczyć stosując standardowe typy danych.

2.2 Symbol Newtona

W poprzednim punkcie zdefiniowaliśmy silnię. Będzie nam ona potrzebna po to aby zdefiniować kolejne pojęcie jakim jest symbol Newtona.

Definicja 2.4 (symbol Newtona). Symbolem Newtona dla liczb naturalnych n, k takich, że $n \geq k$ nazywamy liczbę daną wzorem:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

i oznaczamy przez:

$$\binom{n}{k}.$$

Napis $\binom{n}{k}$ czytamy „ n po k ” albo „ n nad k ”.

Fakt 2.5. *Dla dowolnych liczb naturalnych n, k , takich, że $n \geq k$, zachodzi:*

Problem 2.2. Spróbuj udowodnić powyższy fakt. Jeśli potrafisz, możesz zastosować zasadę indukcji matematycznej (o której będziemy mówić później).

Własności odnośnie symbolu Newtona, zebrane w ostatnim fakcie, umożliwią nam budowę trójkąta Pascal, który składać się będzie z kolejnych symboli Newtona.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} \\ & & & & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & & & & & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ & & & & & & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ & & & & & & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

Bardzo łatwo wyliczyć poszczególne wartości symboli Newtona występujące w trójkącie Pascala, w ogóle nie używając silni. Wystarczy pamiętać, że na bokach trójkąta zawsze będą liczby 1 (wynika to z faktu, że $\binom{n}{n} = \binom{n}{1} = 1$). Wartości wewnętrzne natomiast otrzymujemy stosując wzór: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. Aby więc wyliczyć wartość w jakimś miejscu wewnątrz trójkąta, wystarczy zsumować dwie liczby które znajdują się bezpośrednio nad tym polem po prawej i lewej stronie.

Fakt 2.7 (własności trójkąta Pascala). *W trójkącie Pascala zachodzą następujące własności:*

- $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

- Naprzemienne dodawania i odejmowanie kolejnych wyrazów w danym wierszu (poza pierwszym) zawsze daje zero. Innymi słowy:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots \pm \binom{n}{n} = 0,$$

co można ładniej zapisać:

$$\binom{n}{0} + (-1)^1 \binom{n}{1} + (-1)^2 \binom{n}{2} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

Problem 2.3. Czy potrafisz wyjaśnić, dlaczego „ładniejszy” zapis drugiego podpunktu powyższego faktu jest poprawny?

2.4 Uogólnione wzory skróconego mnożenia

Po tym przydługim wstępie, możemy przejść do sedna tej części, czyli do podania wzoru Newtona, czyli uogólnionego wzoru skróconego mnożenia.

Fakt 2.8 (uogólniony wzory skróconego mnożenia). *Dla dowolnych liczb a, b zachodzą wzory:*

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \\ &+ \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n. \end{aligned}$$

Problem 2.4. Na podstawie powyższego wzoru, podaj analogiczny wzór dla wyrażenia: $(a-b)^n$. Wskazówka: podstawa zamiast b liczbę $(-b)$ i zastosuj podany wzór dla $(a+(-b))^n$.

Uwaga 2.9. Istnieje prostszy i bardziej „elegancki” zapis długich sum. Zamiast pisać wzór w którym pojawiają się $\dots$ możemy użyć symbolu $\sum$. Ze względu jednak, że taka forma wykracza poza program liceum, podamy tylko dla zainteresowanych, wzór Newtona zapisany z zastosowaniem tego sposobu:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^n b^{n-k}.$$

Uwaga 2.10. Zauważ, że kolejne współczynniki występujące we wzorze Newtona, stanowią dokładnie jeden z wierszy trójkąta Pascala.

Znając wzór Newtona możemy łatwo udowodnić własności trójkąta Pascala o których była mowa w poprzednim podrozdziale. Zgodnie z tym co powiedzieliśmy w powyższej uwadze, współczynniki z wzoru Newtona to jeden z wierszy trójkąta Pascala. Korzystając z wzoru Newtona rozpiszmy wyrażenie $(1+1)^n$, które oczywiście równe jest 2^n :

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n = \binom{n}{0} \cdot 1^n \cdot 1^0 + \binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot 1^1 + \dots + \binom{n}{n} \cdot 1^0 \cdot 1^n = \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc, że suma wyrazów n -tego wiersza trójkąta Pascala, równa się 2^n . Podobnie, rozważając wyrażenie $(1-1)^n$ można udowodnić drugą z własności trójkąta Pascala.

Problem 2.5. Udowodnij drugą z własności trójkąta Pascala.

3 Zadania

Zadanie 1. Przypomnij podstawowe własności dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia.

Zadanie 2. Przypomnij podstawowe własności potęgowania.

Zadanie 3. Zapisz w postaci sumy (różnicy) poniższe wyrażenia:

a) $(2x + 1)^2$,

b) $(2x - 3)(2x + 3)$,

c) $(x + \frac{1}{2})^2$,

d) $(\frac{k}{2} - \frac{m}{3})^2$,

e) $(-a - b)(-a + b)$.

Zadanie 4. Zapisz w „prostszej” postaci:

a) $(x + 5)^2 - x(x + 5)$,

b) $(x - 2)^3 - (x - 2)^2 - (x - 2)$,

c) $2(t - 4)(t + 4) - (2t + 3)^2$,

d) $(x + y)^3 - (x - y)^3$,

e) $[(p + 2q)^3 - (2p - q)^3] - 6pq(3p + q)$,

f) $[(a - 2b)(a + 2b)]^3$.

Zadanie 5 (★). Rozłóż na czynniki:

a) $2x^2 + 2y^2$,

b) $2a^2b - 4ab^2$,

c) $8p^4 - 4p^3 + 2p^2$,

d) $\frac{a^2}{25} - \frac{b^2}{16}$,

e) $2x^2 - 8$.

Zadanie 6 (★★). Dopisz brakujące nawiasy z lewej strony równości, tak aby zachodziła równość:

a) $4 \cdot 2x + y - 6z + 1 - 7 \cdot x + y + x - y \cdot z = x - 3y + z(x - y - 6) + 1$,

b) $x \cdot x + y + z - x + y - z \cdot x + x \cdot z = (y + z) \cdot x - (x + z) \cdot y + y \cdot z$

Zadanie 7. Na podstawie uogólnionego wzoru skróconego mnożenia, podaj wzór na:

a) $(a + b)^3$,

b) $(a - b)^3$,

c) $(a + b)^4$.

Zadanie 8 (★). Podaj wzór na $(a + b + c)^n$. Wskazówka: $(a + b + c)^n = (a + (b + c))^n$.