

# Zajęcia nr. 3 – notatki

22 kwietnia 2005

## 1 Funkcje liczbowe – wprowadzenie

Istnieje nieskończenie wiele funkcji w matematyce. W dodatku, nie wszystkie są liczbowe. Rozpatruje się funkcje które pobierają argumenty i zwracają wartości będące elementami bardzo abstrakcyjnych zbiorów. Bez względu jednak na to jakie by te zbiory nie były, ważne jest jedno – funkcja to przyporządkowanie. Funkcja przyporządkowuje elementy jednego zbioru, elementom innego. Aby była to funkcja w sensie matematycznym, dla każdego elementu zbioru argumentów, który będziemy nazywać dalej dziedziną, musi być przypisany dokładnie jeden element ze zbioru wartości. W dalszej części tego opracowania, będziemy zajmować się tylko funkcjami, których dziedziny i zbiory wartości są zbiorami liczbowymi.

### 1.1 Sposoby opisu funkcji

Funkcje matematyczne można opisywać na wiele sposobów. W większości przypadków w zadaniach jakie będziemy rozwiązywać, będziemy spotykać funkcje podane za pomocą wzorów. Zdarza się jednak, że napisanie jawnego (tzn. takiego w którym podajemy dokładny przepis na wyliczenie  $f(x)$ , który wymaga tylko tego abyśmy znali wartość  $x$ ) wzoru jest niemożliwe (lub bardzo trudne). Czasem można zastosować, omawiany już wcześniej wzór rekurencyjny, jednak i to nie zawsze pomaga. Wówczas można, a czasem nawet trzeba zastosować inny opis funkcji. Często spotyka się więc funkcje opisane: grafem, tabelką, lub nawet tylko opisem słownym ich działania.

**Przykład 1.1.** Aby pokazać problem z opisem funkcji, rozważmy popularną w matematyce funkcję „podłoga”<sup>1</sup>. Funkcja „podłoga” w skrócie jest zaokrągleniem liczby w dół, to znaczy, jest to funkcja, która każdej liczbie rzeczywistej  $x$  przypisuje najbliższą jej liczbę całkowitą, która jest mniejsza bądź równa od  $x$ . Symbolicznie „podłogę z  $x$ ” zapisujemy:  $\lfloor x \rfloor$ . Trudno jednak wyobrazić sobie wzór opisujący tą funkcję. Prawdopodobnie jest możliwy do zapisania, lub przynajmniej do opisanie symbolami matematycznymi, jednak taki wzór/opis byłby strasznie nieczytelny w porównaniu z opisem słownym.

### 1.2 Oznaczenia

Często stosować będziemy następujące oznaczenie dla funkcji:

$$f: X \rightarrow Y,$$

gdzie zbiór  $X$  jest dziedziną funkcji  $f$  (często oznaczanym przez  $D_f$  lub  $D$ ), natomiast zbiór  $Y$  jest przeciwdziedziną funkcji  $f$ . Zapis taki czytamy: „funkcja  $f$  przeprowadza zbiór  $X$  w zbiór  $Y$ ” lub „funkcja  $f$  działa ze zbioru  $X$  w zbiór  $Y$ ”.

Nazwy  $X$  i  $Y$  jako zbiory argumentów i wartości, oraz literki  $x$  i  $y$  dla oznaczenie argumentu i wartości, stosowane są zwyczajowo. Bardzo często jednak literki te ulegają zmianie. Często aby podkreślić, że argument jest liczbą naturalną<sup>2</sup> rozważamy funkcję  $f(n)$ .

<sup>1</sup>Istnieje też funkcja „sufit”, zapisujemy ją:  $\lceil x \rceil$ . Czy umiesz, przez analogię, domyśleć się jak działa?

<sup>2</sup>Takie szczególne funkcje zazwyczaj nazywa się ciągami nieskończonymi.

Sama nazwa funkcji również może się zmieniać zależnie od potrzeb. Na przykład w zadaniach fizycznych często można spotkać funkcję  $V(t)$ , która określa zależność prędkości  $V$  od czasu  $t$ , który jest argumentem.

### 1.3 Dziedzina i dziedzina naturalna funkcji

Dziedziną funkcji jest zbiór argumentów, czyli mówiąc potocznie, zbiór takich „ $x$ -ów” dla których możemy policzyć wartość  $f(x)$ . Bardzo często dziedzina jest narzucona przez warunki danego zadania. Na przykład gdy liczymy liczbę osób w klasie, albo cenę towaru. Wiemy wtedy, że szukana liczba nie może być ujemna. W przypadku liczby osób musi nawet być naturalna. Zdarza się jednak, że dziedzina nie jest wymuszona przez warunki zadania, nie jest podana ani nie ma żadnych powodów aby ją ograniczać. Wtedy przyjmujemy domyślnie, że dana jest tzw. **dziedzina naturalna**. Dziedziną naturalną funkcji  $f$  nazywamy zbiór wszystkich argumentów, dla których da się policzyć wartość funkcji, nie zależnie od tego czy ma to jakiś sens praktyczny czy nie.

**Przykład 1.2.** Funkcja kwadratowa, na przykład postaci  $f(x) = x^2 + 3x - 1$ , może pojawić się przy liczeniu zadań z symbolem Newtona. Oczywiście wzór jest poprawny dla dowolnej liczby rzeczywistej. Tak więc dziedziną naturalną takiej funkcji jest  $\mathbb{R}$ . Jeśli jednak rozważaliśmy zadanie z symbolem Newtona, to argument prawdopodobnie będzie mógł być tylko liczbą naturalną. Tak więc dziedziną funkcji  $f$  będzie zbiór liczb naturalnych:  $\mathbb{N}$ .

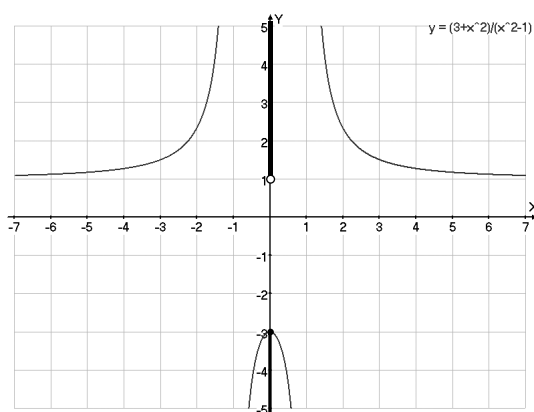
**Uwaga 1.3.** Przed rozwiązywaniem jakiegokolwiek zadania, zastanów się jaka jest dziedzina funkcji w nim występujących.

### 1.4 Zbiór wartości funkcji

Zbiór wartości funkcji  $f: X \rightarrow Y$  jest to zbiór złożony ze wszystkich elementów postaci  $f(x)$ , gdzie  $x \in X$ . Jest to oczywiście podzbiór zbioru  $Y$ . Oznaczamy go  $f(X)$ . Symbolicznie możemy więc zapisać:

$$f(X) = \{y: y = f(x), x \in X\}.$$

Jeśli dany jest wykres funkcji  $f$ , to zbiór wartości można otrzymać rzutując ten wykres na oś OY:



Zbiorem wartości jest  $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$ .

### 1.5 Równość funkcji

Zagadnienie równości funkcji może wydawać się dość proste, jednak jest bardzo istotne i ważne.

**Definicja 1.4** (równość funkcji). Mówimy, że dwie funkcje liczbowe  $f$  i  $g$  są równe, wtedy i tylko wtedy, gdy:

- mają te same dziedziny,
- dla każdego elementu  $x$  z dziedziny, zachodzi  $f(x) = g(x)$ .

Drugi z warunków powyższej definicji sprowadza się właściwie tylko do tego, aby pokazać, że obie funkcje dają się wyrazić tym samym wzorem.

**Przykład 1.5.** Rozważmy funkcje  $f(x) = x - 1$  oraz  $g(x) = \frac{(x-1)(x^2+2)}{x^2+2}$ . Po pierwsze sprawdzamy równość dziedzin. Jako że, nie podano żadnego ograniczenia przyjmujemy w obu przypadkach dziedzinę naturalną. Jak nie trudno zauważyć,  $D_f = D_g = \mathbb{R}$ . Widać również, że funkcję  $g$  można zapisać w prostszej postaci:  $g(x) = x - 1$ . Wobec tego funkcje  $f$  i  $g$  są równe.

**Przykład 1.6.** Rozważmy funkcje  $f(x) = x - 1$  oraz  $g(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x+2}$ . Podobnie jak poprzednio, funkcję  $g$  można zapisać w postaci  $g(x) = x - 1$ . Jednak funkcje  $f$  i  $g$  nie są równe, ponieważ dziedziną funkcji  $g$  może być conajwyżej zbiór  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ , natomiast dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór  $\mathbb{R}$ .

## 1.6 Funkcja monotoniczna

Monotoniczność jest jedną z podstawowych własności funkcji.

**Definicja 1.7** (funkcja rosnąca). Funkcję  $f$  nazywamy rosnącą w dziedzinie wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$x_1, x_2 \in D_f; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

**Definicja 1.8** (funkcja malejąca). Funkcję  $f$  nazywamy malejącą w dziedzinie wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$x_1, x_2 \in D_f; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

**Definicja 1.9** (funkcja stała). Funkcję  $f$  nazywamy stałą w dziedzinie wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$x_1, x_2 \in D_f; f(x_1) = f(x_2),$$

niezależnie od tego czy  $x_1 = x_2$  czy nie.

Warunki zawarte w definicjach w praktyce sprowadzają się do pokazania, że dla dowolnych  $x_1, x_2$  z dziedziny funkcji, takich, że  $x_1 < x_2$ , zachodzi:

- $f(x_1) - f(x_2) < 0$  w przypadku funkcji rosnącej,
- $f(x_1) - f(x_2) > 0$  w przypadku funkcji malejącej,
- $f(x_1) - f(x_2) = 0$  w przypadku funkcji stałej.

Oczywiście zdarza się często, że funkcja nie jest monotoniczna w swojej dziedzinie. Przykładem jest funkcja  $f(x) = x^2$ . W takim przypadku wygodnie jest mówić o monotoniczności na przedziale<sup>3</sup>. Monotoniczność na przedziale definiujemy dokładnie tak jak monotoniczność w dziedzinie, z tą różnicą, że  $x_1, x_2$  muszą należeć do rozpatrywanego przedziału.

**Uwaga 1.10.** Istnieją funkcje, które nie są monotoniczne na żadnym podzbiórze swojej dziedziny.

---

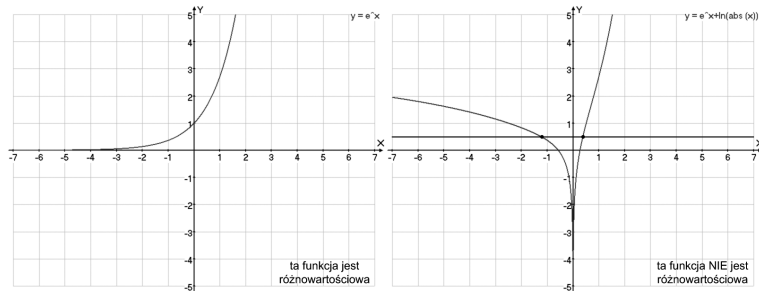
<sup>3</sup>Lub ogólniej na podzbiórze dziedziny.

## 1.7 Funkcja różnowartościowa

Funkcja nazywa się **różnowartościową** jeśli dla różnych argumentów przyjmuje różne wartości. Formalnie możemy napisać więc, że funkcja  $f$  jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$x_1, x_2 \in D_f; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Mając wykres badanej funkcji sprawdzamy czy jest ona różnowartościowa, obserwując ile punktów wspólnych z wykresem mogą mieć proste równoległe do osi OX. Jeśli każda taka prosta równoległa od osi OX ma co najwyżej jeden punkt wspólny z wykresem, to znaczy, że dana funkcja jest różnowartościowa. Jeśli natomiast choć jedna z nich ma dwa (lub więcej) punktów wspólnych, oznacza to, że badana funkcja nie jest różnowartościowa.



## 1.8 Funkcja odwrotna

Funkcją odwrotną do funkcji  $f$  nazywamy funkcję  $f^{-1}$  taką, że jeśli  $f(x) = y$  to  $f^{-1}(y) = x$ . Dziedziną funkcji  $f^{-1}$  jest więc zbiór wartości funkcji  $f$ , natomiast zbiorem wartości funkcji  $f^{-1}$  jest dziedzina  $f$ .

**Uwaga 1.11** (warunek konieczny i wystarczający istnienia funkcji odwrotnej). Nie każda funkcja posiada funkcję odwrotną. Na to aby funkcja  $f$  posiadała funkcję odwrotną potrzeba i wystarcza, aby  $f$  była różnowartościowa.

**Fakt 1.12** (wykres funkcji odwrotnej). Wykres funkcji odwrotnej  $f^{-1}$  można otrzymać z wykresu funkcji  $f$  poprzez symetrię względem prostej  $y = x$ .

Wynika stąd, że jeśli dane jest równanie wykresu funkcji  $f: y = f(x)$ , to równanie wykresu funkcji  $f^{-1}$  jest postaci  $x = f(y)$ . Wystarczy z tego równania wyliczyć  $y$  i mamy gotowy wzór na funkcję  $f^{-1}$ .

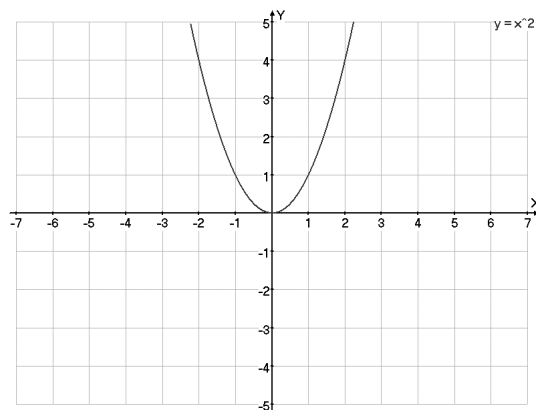
**Przykład 1.13.** Niech dana będzie funkcja  $f(x) = 3x - 4$ . Wówczas równaniem wykresu funkcji  $f$  jest  $y = 3x - 4$ . Zmieniając  $y$  na  $x$  i  $x$  na  $y$  otrzymujemy równanie wykresu  $f^{-1}$ :

$$\begin{aligned} x &= 3y - 4, \\ \text{stąd } y &= \frac{x + 4}{3}, \\ \text{czyli } y &= \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

## 1.9 Parzystość funkcji

**Definicja 1.14** (funkcja parzysta). Funkcję  $f$  nazywamy parzystą, o ile dla każdego argumentu  $x \in D_f$  zachodzi warunek  $f(-x) = f(x)$ .

**Przykład 1.15.** Rozważmy funkcję  $f(x) = x^2$ . Łatwo pokazać, że dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  zachodzi  $x^2 = (-x)^2$ . Oznacza to, że funkcja  $f$  jest parzysta. Kiedy narysujemy wykres funkcji  $f$ , łatwo zauważymy, iż jest on symetryczny względem osi OY.

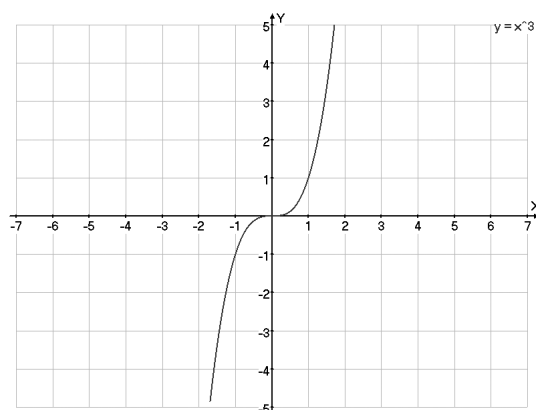


Okazuje się, że wykresy wszystkich funkcji parzystych mają taką własność.

**Fakt 1.16** (wykres funkcji parzystej). *Jeśli funkcja  $f$  jest parzysta to jej wykres jest symetryczny względem osi  $OY$  i odwrotnie, jeśli wykres funkcji  $f$  jest symetryczny względem osi  $OY$  to funkcja ta jest parzysta.*

**Definicja 1.17** (funkcja nieparzysta). Funkcję  $f$  nazywamy nieparzystą, o ile dla każdego argumentu  $x \in D_f$  zachodzi warunek  $f(-x) = -f(x)$ .

**Przykład 1.18.** Rozważmy funkcję  $f(x) = x^3$ . Łatwo pokazać, że dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  zachodzi  $(-x)^3 = -(x^3)$ . Oznacza to, że funkcja  $f$  jest nieparzysta. Kiedy narysujemy wykres funkcji  $f$ , łatwo zauważymy, iż jest on symetryczny względem punktu  $(0,0)$ .



Okazuje się, że wykresy wszystkich funkcji nieparzystych mają taką własność.

**Fakt 1.19** (wykres funkcji nieparzystej). *Jeśli funkcja  $f$  jest nieparzysta to jej wykres jest symetryczny względem punktu  $(0,0)$  i odwrotnie, jeśli wykres funkcji  $f$  jest symetryczny względem punktu  $(0,0)$  to funkcja ta jest nieparzysta.*

**Uwaga 1.20.** Pojęcia parzystości i nieparzystości nie wykluczają się wzajemnie. Istnieją funkcje które są zarówno parzyste jak i nieparzyste (czy umiesz podać przykład?) oraz takie które nie są ani parzyste ani nieparzyste (mówimy wtedy o nich, że są nieokreślone względem parzystości).

**Uwaga 1.21** (dziedzina funkcji określonych co do parzystości). Czasem bardzo łatwo stwierdzić, że funkcja nie może być określona względem parzystości. Jeśli bowiem funkcja miałaby być parzysta lub nieparzysta, jej wykres musiałby zachowywać symetrię względem osi  $OY$  lub punktu  $(0,0)$ . A skoro tak, to również dziedzina tej funkcji musi być symetryczna względem zera. Jeśli nie jest, to funkcja napewno nie będzie określona co do parzystości.

## 2 Zadania

**Zadanie 1.** Wyznacz dziedzinę (naturalną) i zbiór wartości funkcji:

- a)  $f(x) = 4x + 10$ ,
- b)  $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2-1}$ ,
- c)  $f(x) = \frac{x(x-1)(x+2)(4x-3)}{x^3+x^2+x}$ ,
- d)  $f(x) = \cos x$ ,
- e)  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,
- f)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ,
- g)  $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$ .

**Zadanie 2.** Zbadaj, czy funkcje  $f$  i  $g$  są równe:

- a)  $f(x) = 1$ ,  $g(x) = 2 \cdot \frac{x-1}{2x-2}$ ,
- b)  $f(x) = \frac{2}{x}$ ,  $g(x) = x \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}}$ ,
- c)  $f(x) = x$ ,  $g(x) = h(\sqrt{x})$ , gdzie  $h(x) = x^2$ ,
- d)  $f(x) = x$ ,  $g(x) = h(x^2)$ , gdzie  $h(x) = \sqrt{x}$ ,
- e)  $f(x) = x$ ,  $g(x) = h(\frac{1}{x})$ , gdzie  $h(x) = \frac{1}{x}$ ,
- f)  $f(x) = \cos x - \sin x$ ,  $g(x) = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x}$ ,
- g)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $g(x) = 2 \cdot h(x^2)$ , gdzie  $h(x) = \frac{1}{2x}$ .

**Zadanie 3.** Korzystając z definicji, zbadaj monotoniczność funkcji:

- a)  $f(x) = x^3 - 2$ ,
- b)  $f(x) = -3x + 1$ ,
- c)  $f(x) = \frac{1}{x}$  w przedziale  $x \in (0, +\infty)$ ,
- d)  $f(x) = x^4$ ,
- e)  $f(x) = \sqrt{x} + 1$ .

**Zadanie 4.** Korzystając z definicji, zbadaj parzystość funkcji:

- a)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,
- b)  $f(x) = x^2 + 1$ ,
- c)  $f(x) = 0$ ,
- d)  $f(x) = 4x$ ,
- e)  $f(x) = x^3$ .

**Zadanie 5.** Znajdź funkcję odwrotną do danej, lub uzasadnij jej nieistnienie:

- a)  $f(x) = 3x + 3$ ,
- b)  $f(x) = x^2 + x + 1$ ,
- c)  $f(x) = x^3$ ,
- d)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ .