

Zajęcia nr. 6:

Równania i układy równań liniowych

13 maja 2005

1 Podstawowe pojęcia.

Definicja 1.1 (równanie liniowe). Równaniem liniowym będziemy nazywać równanie postaci: $ax = b$, gdzie x oznacza niewiadomą, natomiast a i b to parametry.

Rozwiązać powyższe równanie oznacza znaleźć wszystkie liczby, które podstawione w miejsce x spełniają równość. Jeśli nie zaznaczono tego inaczej, przyjmujemy, że x może być dowolną liczbą rzeczywistą.

Przeanalizuj poniższe przykłady i sprawdź czy rozumiesz skąd wzięły się takie, a nie inne wyniki.

Przykład 1.2. Rozwiązaniem równania $2x = 0$ jest dokładnie jedna liczba: 0.

Przykład 1.3. Rozwiązaniem równania $0x = 0$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych (mówimy też, że pierwiastkiem tego równania jest dowolna liczba rzeczywista).

Przykład 1.4. Rozwiązaniem równania $0x = 3$ jest zbiór pusty, co oznacza, że żadna liczba rzeczywista nie jest pierwiastkiem tego równania.

1.1 Liczba rozwiązań równania liniowego.

Fakt 1.5. *Ogólnie, rozwiązując równanie liniowe $ax = b$ otrzymujemy:*

1. jedno rozwiązanie postaci $x = -\frac{b}{a}$, jeśli $a \neq 0$,
2. nieskończenie wiele rozwiązań (czyli $x \in \mathbb{R}$), jeśli $a = 0$ i jednocześnie $b = 0$,
3. zbiór pusty - brak rozwiązań ($x \in \emptyset$), jeśli $a = 0$ i $b \neq 0$.

Wniosek: Równanie liniowe może mieć 0, 1 lub ∞ rozwiązań.

2 Równania liniowe z założeniami.

W równaniach liniowych, o których pisaliśmy dotychczas, zakładano (choć nie było to nigdzie wyraźnie napisane), że x może być dowolną liczbą rzeczywistą (jest to podobnie jak w przypadku funkcji - dziedzina naturalna). Może się jednak zdarzyć, że równanie będzie miało dziedzinę zadaną z góry. Poniższa definicja jest właściwie rozszerzeniem poprzedniej.

Definicja 2.1 (równanie liniowe z założeniami). Równanie postaci $ax = b$ przy założeniu $x \in D$ nazywamy liniowym (z założeniami), a zbiór D nazywamy dziedziną tego równania.

Oczywiście, przy poszukiwaniu rozwiązania takiego równania, interesują nas tylko takie liczby x które spełniają dane równanie i jednocześnie należą do zbioru D .

Przykład 2.2. Rozwiążmy równanie $3x = 5$ przy założeniu $x \in \mathbb{N}$. Oczywiście równanie takie nie ma rozwiązań, otrzymujemy zbiór pusty ($x \in \emptyset$). (dlaczego?)

Przykład 2.3. Rozważmy równanie $6x = 2$ przy założeniu $x \in (0, \infty)$. Równanie to ma jedno rozwiązanie $x = \frac{1}{3}$.

Przykład 2.4. Równanie $0x = 0$ przy założeniu $x \in \langle 0, \infty \rangle$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, czyli ... jego rozwiązaniem jest cała dziedzina (wszystkie liczby z dziedziny spełniają to równanie), czyli: $x \in \langle 0, \infty \rangle$.

Najprostszym sposobem rozwiązania równania liniowego $ax = b$ z założeniem $x \in D$ jest rozwiązanie „zwykłego” równania liniowego, a następnie obliczenie części wspólnej zbioru rozwiązań oraz zbioru D .

Uwaga 2.5. Jeśli w czasie pracy nad rozwiązaniem jakiegoś problemu otrzymasz równanie (niekoniecznie liniowe) ZAWSZE zastanów się, czy nie jest ono „obarczone” jakimś założeniem.

Przykład 2.6. Spróbujmy rozwiązać zadanie o następującej treści: Jeden bilet do kina kosztuje 10 zł. Za ile takich biletów zapłacisz 37 zł? Aby rozwiązać to zadanie, musimy w zasadzie rozwiązać proste równanie: $10x = 37$, ale przy założeniu $x \in \mathbb{N}$ (dlaczego?) - i oczywiście okazuje się, że rozwiązaniem jest zbiór pusty.

Przykład 2.7. Równanie postaci: $\frac{-x-3}{x+2} = \frac{x+1}{x+2}$ jest oczywiście równoważne równaniu $-2x = 4$, gdzie $x \neq -2$ (dlaczego?). Jest to równanie sprzeczne (zbiorem rozwiązań jest zbiór pusty).

2.1 Zadania

Zadanie 1. Podaj liczbę pierwiastków danego równania w zależności od wartości występujących parametrów.

- a) $mx - 1 = 2x$,
- b) $m^2x + m = x + 1$,
- c) $ax + b = cx$,
- d) $a^2x + 3 = 2 - (b^2 + 1)x$,
- e) $ax^2 + 3x - 4 = 7 + a^2$.

Zadanie 2. Rozwiąż podane równanie (uwzględniając wszystkie możliwości dla parametrów).

- a) $4x + 3 = mx - m$,
- b) $3x - m = mx - 3$,
- c) $k^2x - 1 = x - k$,
- d) $ax + 4 = 8x - b$.

Zadanie 3. Rozwiąż podane równania:

- a) $(x - 3)(x + 4) - 2(3x - 2) = (x - 4)^2$, gdzie $x \in \mathbb{N}$,
- b) $\frac{15}{2x+7} = \frac{6}{x+2}$,
- c) $5(x - 1)^2 - 2(x + 3)^2 = 3(x + 2)^2 - 7(6x - 1)$, gdzie $x \geq 0$,

d) $(x+1)^3 - (x-1)^3 = 6(x^2 + x + 1)$, gdzie $x \neq 2$.

Zadanie 4. Na pewnym sprawdzianie z matematyki było do rozwiązania 10 zadań. Ustalono również następujące zasady. Za dobrze rozwiązane zadanie uczeń otrzymywał 5 punktów, natomiast za każde błędne rozwiązanie uczeń tracił 3 punkty. Ile zadań zostało rozwiązanych dobrze jeśli uczeń otrzymał:

- a) 34 punkty, b) 12 punktów, c) 2 punkty, d) -7 punktów?

Zadanie 5. Długopis kosztuje 3 zł. Ile kosztuje ołówek, jeśli za 2 długopisy i 3 ołówki zapłacono:

- a) 9 zł, b) 7 zł, c) 7 zł. i 50 gr?

3 Układy równań liniowych

Definicja 3.1. Układem dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy układ postaci:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases},$$

gdzie przynajmniej jeden z paramterów a_1 i b_1 oraz przynajmniej jeden z parametrów a_2 i b_2 jest różny od zera (to założenie jest potrzebne po to, aby każde z równań wyznaczało na płaszczyźnie pewną prostą).

Problem 3.1. Jaki zbiór punktów na płaszczyźnie określa równanie $0x + 0y = c$. Czy zbiór ten zależy od wartości parametru c ?

3.1 Metody rozwiązywania układów równań liniowych.

Ponieważ każde z równań określa pewną prostą na płaszczyźnie zatem rozwiązaniem układu są pary (x, y) wyznaczające punkty wspólne tych prostych. Jak wiadomo dwie proste mogą mieć 0, 1 lub ∞ punktów wspólnych (czy potrafisz wykonać odpowiednie rysunki?). Z tego wynika, że rozważany układ równań może albo być sprzeczny, albo mieć dokładnie jedno rozwiązanie (mówimy wtedy że jest oznaczony) albo mieć ∞ wiele rozwiązań (mówimy wtedy, że jest nieoznaczony).

Istnieje wiele metod rozwiązywania układów równań. Jeśli układ nie zawiera parametrów, to możemy użyć:

1. metody podstawiania,
2. metody przeciwnych współczynników,
3. metody graficznej,
4. metody wyznaczników.

W układach bez parametrów, preferowane jest używanie jednej z dwóch pierwszych metod. (Przypomnij sobie na czym polegają metody 1, 2 i 3!) Jeśli natomiast układ zawiera choć jeden parametr, wydaje się, że metoda wyznaczników jest „najbezpieczniejsza” i najefektywniejsza.

3.2 Metoda wyznaczników.

Metoda wyznaczników jest najbardziej uniwersalną metodą rozwiązywania układów równań liniowych. W matematyce używa się jej postaci ogólnej, zwanej metodą bądź wzorami Cramera. Metoda taka pozwala na rozwiązywanie, w bardzo prosty sposób, układów wielu równań z dużą liczbą niewiadomych. My w naszych rozważaniach ograniczymy się do układów dwóch równań z dwoma niewiadomymi. Poniżej zebrano podstawowe definicje i fakty, potrzebne przy korzystaniu z tej metody.

Definicja 3.2 (wyznaczniki układu równań). Dla układu:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

wyznacznikiem głównym nazywamy liczbę W obliczoną wzorem:

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Uwaga 3.3 (interpretacja geometryczna wyznacznika). Wyznacznik główny informuje nas, czy proste, których równania występują w układzie równań są równoległe czy nie.

Aby zbadać ile rozwiązań ma dany układ równań warto posłużyć się wyznacznikiem. Poniżej zebrano kilka faktów wiążących wyznacznik, właśnie z ilością rozwiązań układu równań.

Fakt 3.4. *Jeśli wyznacznik główny układu $W = 0$, to proste wyznaczane przez ten układ są równoległe. Jeśli natomiast wyznacznik główny $W \neq 0$, to proste te nie są równoległe.*

Fakt 3.5. *Jeśli wyznacznik głów układu $W \neq 0$, to układ jest oznaczony - ma dokładnie jedno rozwiązanie. I odwrotnie, jeśli układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, to jego wyznacznik główny napewno jest różny od zera.*

Fakt 3.6. *Jeśli wyznacznik głów układu $W = 0$, to układ nie jest oznaczony - to znaczy albo okaże się być sprzeczny albo ma ∞ wiele rozwiązań.*

Uwaga 3.7. Zauważmy, że gdy $W = 0$, to dalej nie wiemy, ile rozwiązań posiada układ równań. Sposób poradzenia sobie z tą „przeszkodą” zilustruje poniższy przykład.

Przykład 3.8 (badanie ilości rozwiązań układu równań z parametrem). W zależności od parametru m zbadamy ilość rozwiązań układu:

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ 3x + 3my = 3 \end{cases}$$

Obliczmy wyznacznik główny tego układu.

$$W = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 3 & 3m \end{vmatrix} = 3m^2 - 3.$$

Sprawdźmy kiedy $W = 0$:

$$3m^2 - 3 = 0 \quad \text{gdy} \quad m = 1 \quad \text{lub} \quad m = -1.$$

Dla pozostałych m , zachodzi $W \neq 0$, zatem wiadomo już, że jeśli $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, to układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Pozostaje sprawdzić co się dzieje dla $m = 1$ oraz dla $m = -1$ (w obu przypadkach proste wyznaczane przez układ równań są równoległe, nie wiadomo jednak czy pokrywają się czy też nie mają punktów wspólnych).

Jeśli $m = 1$ to nasz układ przyjmuje konkretną postać:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$$

Wystarczy podzielić drugie równanie obustronnie przez 3 aby otrzymać:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Bez żadnych dalszych wyliczeń łatwo możemy stwierdzić, że oba równania opisują tę samą prostą - czyli, w tym przypadku układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Jeśli natomiast $m = -1$, to układ nasz przybiera postać:

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases}$$

Wystarczy teraz pierwsze z równań pomnożyć przez -1 a drugie podzielić przez 3 (dążymy do zrównania współczynnika przy x), aby otrzymać:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Widać tutaj od razu, że otrzymane proste są równoległe, ale napewno nie pokrywają się (są „rozsunięte”), stąd układ jest sprzeczny.

Zbierzmy więc uzyskane wyniki. Okazało się, że jeśli $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, to układ ma 1 rozwiązanie. Jeśli $m = -1$, to układ nie ma rozwiązań, jeśli natomiast $m = 1$, to układ ma ∞ wiele rozwiązań.

Aby poradzić sobie z rozwiązaniem (a nie tylko z podaniem liczby rozwiązań) układu który posiada parametry, wprowadzimy tzw. wyznaczniki szczegółowe.

Definicja 3.9 (wyznaczniki szczegółowe układu równań). Wyznacznikami szczegółowymi niewiadomych x i y nazywać będziemy odpowiednio liczby:

$$W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1,$$

oraz

$$W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1.$$

Fakt 3.10. Jeśli wyznacznik główny układu $W \neq 0$, to rozwiązaniem układu jest para liczb:

$$\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} \\ y = \frac{W_y}{W} \end{cases}.$$

Co więcej można udowodnić następujące własności.

Fakt 3.11. Jeśli $W = 0$ oraz $W_x = W_y = 0$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Fakt 3.12. Jeśli $W = 0$ oraz przynajmniej jeden z wyznaczników szczegółowych W_x lub W_y jest różny od zera, to układ jest sprzeczny.

3.3 Zadania

Zadanie 6. Używając metody podstawiania rozwiązać układy równań:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = 3 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases} \end{array}$$

Zadanie 7. Używając metody przeciwnych współczynników rozwiąż układy równań:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{1}{2}x - 3y = 8 \\ -2x + 6y = 16 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 4x - y = 3 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases} \end{array}$$

Zadanie 8. Podany układ zilustruj graficznie i jeśli to możliwe podaj dokładne rozwiązanie.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 3x + y = 10 \\ -x + y = -2 \end{cases} \end{array}$$

Omów wady metody graficznej.

Zadanie 9. Przypuśćmy, że $b_1 \neq 0$ i $b_2 \neq 0$. Wtedy każdy taki układ dwóch równań liniowych można sprowadzić do postaci:

$$\begin{cases} y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} \\ y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

Posługując się interpretacją graficzną podaj jak ilość rozwiązań zależy od liczb: $-\frac{a_1}{b_1}$, $-\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{c_1}{b_1}$, $\frac{c_2}{b_2}$.

Zadanie 10. W każdym z podanych niżej przypadków wylicz W i jeśli $W \neq 0$, to rozwiąż dany układ metodą wyznaczników, a jeśli $W = 0$, to przez odpowiednie pomnożenie przekształć układ do postaci, z której „widać” ilość rozwiązań:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + 2y = 11 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 3x - y = 5 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 2x + 5y = 25 \\ -4x - 10y = -50 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 3x + 8y = -1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 28x + 35y + 3 = 0 \\ 12x + 15y + 25 = 0 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 7x - 3y + 1 = 0 \\ 4x - 5y + 17 = 0 \end{cases} \end{array}$$

Zadanie 11. W zależności od parametru (parametrów) podaj liczbę rozwiązań dla:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + 3my = 1 + m \\ 3mx + y = -2(m - 1) \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + y = a \\ mx + y = 0 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + my = 2m \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} m^2x + y = 1 \\ x + y = m \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} (a - 3)x - 4y = b \\ 9x - (a + 2)y = -9 \end{cases} & \end{array}$$

Zadanie 12. W zależności od parametru m rozwiąż podany układ:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 3x + my = -2 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases} & \text{b)} (\star) \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + my = 2m \end{cases} & \text{c)} (\star) \begin{cases} mx + y = m \\ x + my = m^2 \end{cases} \end{array}$$

Zadanie 13. W zależności od parametru k podaj liczbę rozwiązań układu:

$$\begin{cases} kx + y = k^2 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

i odpowiedz, dla jakich wartości parametru k układ:

1. jest niesprzeczny,
2. ma co najmniej jedno rozwiązanie,
3. jest nieoznaczony,
4. ma co najwyżej jedno rozwiązanie,
5. ma co najmniej dwa rozwiązania,
6. ma dokładnie siedem rozwiązań,

7. $(\star)$ ma rozwiązanie będące parą liczb przeciwnych.

Zadanie 14. Dla jakich wartości parametru b punkt przecięcia prostych danych równaniami:

$$\begin{cases} 2x - 3by = 5b \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

należy do czwartej ćwiartki układu współrzędnych?

Zadanie 15. W zależności od parametru m podaj rozwiązanie układów równań:

a) $\begin{cases} 2mx - (m+2)y = 3m \\ 2(m-1)x - my = 3(m-1) \end{cases}$

d) $\begin{cases} mx - 2(m-2)y = m+3 \\ (m-1)x - 2my = m \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + m(m-1)y = 2m^2 \\ x - (m^2-1)y = m(1-m) \end{cases}$

e) $(\star) \begin{cases} (m+1)^2x - (m^2-1)y = m+1 \\ (m-1)^2x - (m^2-1)y = (m-1)^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (m+1)x - (m-1)y = 2m^2 \\ mx - (m+1)y = m(1-m) \end{cases}$

Zadanie 16. W następujących układach równań przyjmij jedną niewiadomą za parametr i oblicz wartości pozostałych niewiadomych.

a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} m + 3p - t = 2 \\ 2m + t = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4a + b = 3 \\ 2b - c = 4 \end{cases}$

3.4 Układy trzech (i więcej) równań liniowych

W poprzednich podrozdziałach skupialiśmy się głównie na rozwiązywaniu układów dwóch równań, w którym występowały dwie niewiadome (i czasem parametry). Możliwe jest jednak rozwiązywanie większych układów równań.

Metoda wyznaczników dla układów trzech równań liniowych. Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Dla takiego układu równań zdefiniujemy znane już wcześniej pojęcia.

Definicja 3.13 (wyznacznik główny układu trzech równań liniowych). Wyznacznikiem głównym układu trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi nazywamy liczbę:

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

Uwaga 3.14 (wyznaczniki szczególne). Analogicznie do powyższej definicji, możemy podać wzory na wyznaczniki szczególne W_x, W_y, W_z , w których odpowiednią kolumnę zamieniamy na kolumnę d_1, d_2, d_3 i korzystamy z wzoru danego w definicji.

Wszystkie twierdzenia odnośnie liczby rozwiązań układu równań liniowych są nadal prawdziwe, tzn.

- jeśli wyznacznik główny jest różny od zera, to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie,

- jeśli wyznacznik główny i wszystkie wyznaczniki szczególne są równe zero, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań,
- jeśli wyznacznik główny równy jest zero, a któryś (przynajmniej jeden) z wyznaczników szczególnych jest różny od zera, to układ jest sprzeczny.

Zachodzą również wzory:

$$\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} \\ y = \frac{W_y}{W} \\ z = \frac{W_z}{W} \end{cases}$$

Uwaga 3.15. Powyższa metoda wyznaczników, „działa” również dla większych układów równań. Wzory tej metody ogólnie nazywa się wzorami Cramera. Można o nich przeczytać w internecie na przykład tu: http://pl.wikipedia.org/wiki/Wzory_Cramera. Istnieje również bardzo „szybka” metoda rozwiązywania dowolnych, dużych układów równań zwana metodą eliminacji Gaussa, o której można poczytać na przykład tu http://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_Gaussa.

3.5 Zadania dodatkowe

Zadanie 17. Rozwiąż układ równań:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - y - z = 2 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 7 \\ -2x - y + 3z = 6 \\ 4x + 3y + 5z = 7 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y - 2z = 7 \\ 2x - y + 2z = 8 \\ 3x + 2y - 2z = 20 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x + 4y - 3z = -2 \\ x - 3y - 2z = -13 \\ x + 9y - 5z = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + 4y - 5z = 42 \\ 4x + 3y + 4z = -2 \\ 2x - 6y - 8z = -6 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x + y + z = 21 \\ 2y - 5z = 0 \\ 6x - 7z = 0 \end{cases}$$

Więcej zadań z tego działu zostanie podanych na następnych zajęciach.