

- a) $n = 2, r = 5\%$ c) $n = 5, r = 5\%$ e) $n = 10, r = 3\%$
 b) $n = 2, r = 5\%$ d) $n = 5, r = 5\%$ f) $n = 10, r = 5\%$

Zadanie 38. Jaką kwotę należy ulokować na koncie, aby po pięciu latach uzyskać 1217 zł, jeśli roczne oprocentowanie wynosi 4%? Jaką kwotę należałoby złożyć, aby uzyskać ten sam kapitał końcowy po trzech latach?

Zadanie 39. Bank przyjął kwotę 50 000 zł na 5% rocznie i pożyczyl ją na 6% rocznie. Ile zyskał bank w ciągu pięciu lat, a ile by zyskał w ciągu dziesięciu lat?

Zadanie 40. Oblicz, do jakiej wysokości wzrośnie po pięciu latach kapitał 600 zł, jeżeli oprocentowanie wynosi:

- a) w pierwszym roku: 6%, w drugim: 5.5%, a w trzech ostatnich: 4%,
 b) w pierwszym roku: 5.5%, w drugim: 4%, a w trzech ostatnich: 6%.

Zadanie 41. Oprocentowanie lokat w banku *ŻdziercaBank.COM* wynosiło w kolejnych latach: 9%, 8%, 7%, 6%. Stopa procentowa w banku *NiechylPrzekręt-Bank* była w tym samym czasie stała i wynosiła r . Oblicz r , jeśli wpłacenie kapitału na cztery lata było w obu bankach równie (nie)opłacalne (oba banki kapitalizują odsetki rocznie).

Zadanie 42. Firma *Malwersanci.pl* zaciągnęła w banku kredyt wysokości 10 000 zł. Co roku bank nalicza odsetki w wysokości 10%. Kredyt wraz z odsetkami ma być spłacony jednorazowo, po n latach. Na ile lat został zaciągnięty kredyt, jeżeli firma *Malwersanci.pl* musiał spłacić 13 310 zł?

Zadanie 43. Warunki oferowane przez banki dla lokat dwuletnich są następujące:

ńBank 5.44% rocznie, odsetki kapitalizowane co miesiące,

village bank 5.5% rocznie, odsetki kapitalizowane co kwartał,

GetoutBank 5.6% rocznie, odsetki kapitalizowane co pół roku,

BLE Bank 5.65% rocznie, odsetki kapitalizowane co roku.

Który z banków oferuje najkorzystniejsze warunki oszczędzania?

Zadanie 44. Na lokatę terminową (18-miesięczną) wpłacono 5000 zł. Po 18 miesiącach, bank wypłacił 5495,52 zł. Ile (w skali roku) wynosiło oprocentowanie lokaty, jeśli bank kapitalizował odsetki co pół roku?

Ciagi

Kurs matematyki w Oratorium
 (<http://www.salezjanie.rumia.pl/math>)

Spis treści

1 Ciagi liczbowe	1
1.1 Podstawowe własności ciągów	2
1.2 Granica ciągu	3
1.3 Zadania	5
2 Ciąg arytmetyczny	5
2.1 Definicje	5
2.2 Własności ciągu arytmetycznego	6
2.3 Suma ciągu arytmetycznego	7
2.4 Zadania	8
3 Ciąg geometryczny	8
3.1 Definicje	8
3.2 Własności ciągu geometrycznego	9
3.3 Suma ciągu geometrycznego	10
3.4 Zadania	11
4 Zadanie różne	12
5 Elementy matematyki finansowej	14
5.1 Zadania	15

1 Ciagi liczbowe

Definicja 1.1 (ciąg liczbowy skończony). Ciągiem liczbowym skończonym, nazywamy dowolną funkcję o wartościach rzeczywistych, której dziedziną jest zbiór $\{1, 2, \dots, k\}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.

Definicja 1.2 (ciąg liczbowy nieskończony). Ciągiem liczbowym nieskończonym, nazywamy dowolną funkcję o wartościach rzeczywistych, której dziedziną jest cały zbiór liczb naturalnych.

Często na ciagi nieskończone będziemy mówić po prostu ciagi. Wszelkie ciagi, skończone i nieskończone, będziemy oznaczać kolejnymi, małymi literami

alfabetu. Przyjęło się również żeby argument oznaczać przez n (a nie jak tam ma miejsce w przypadku „zwykłych” funkcji x) oraz pisać go bez nawiasów w następujący (znany każdemu) sposób: a_n . Należy jednak pamiętać że napis taki oznacza dokładnie to samo co $a(n)$ – czyli wartość funkcji a dla argumentu n . Na wartość taką będziemy mówić n -ty wyraz ciągu a .

1.1 Podstawowe własności ciągów

Ze względu na definicję ciągu jako funkcji, możemy mówić o takich własnościach ciągów jak: monotoniczność, ograniczoność, różnowartościowość. Można również rysować wykresy ciągów. Poniżej, pokrótce omówimy te podstawowe własności.

Ze względu na wygodę i prostotę formułowania definicji, poniżej mówimy tylko o ciągach nieskończonych. Wszystkie poniższe definicje można bardzo łatwo przerobić na przypadek ciągu skończonego.

Monotoniczność

- Ciąg a jest **rosnący** jeśli spełniony jest warunek:

$$n < k \Rightarrow a_n < a_k$$

dla dowolnych liczb naturalnych n, k .

- Ciąg a jest **malejący** jeśli spełniony jest warunek:

$$n < k \Rightarrow a_n > a_k$$

dla dowolnych liczb naturalnych n, k .

- Ciąg a jest **stały** jeśli wszystkie jego wyrazy są sobie równe.

Ograniczoność

Definicja 1.3. Mówimy że ciąg a jest ograniczony jeśli istnieje taka liczba rzeczywista M , że jest spełniony warunek:

$$|a_n| \leq M$$

dla każdego n naturalnego.

Problem 1.1. Spróbuj omówić, jak wygląda wykres dowolnego ciągu ograniczonego – lub dokładniej: co wszystkie te wykresy mają ze sobą wspólnego/podobnego?

Procent składany Często jednak zdarza się, że co roku (lub z inną określoną częstotliwością), odsetki doliczane są do kapitału od którego liczony jest procent. Biorąc to pod uwagę, nasz kapitał po upływie roku równy jest (podobnie jak poprzednio) $k(1 + \frac{p}{100})$. W następnym roku jednak, oprocentowaniu podlega już nowa kwota. Po dwóch latach stan konta równy jest $k(1 + \frac{p}{100})^2$ i po każdym następnym roku zostaje pomnożony przez $(1 + \frac{p}{100})$. Zauważamy więc, że mamy tu do czynienia z ciągiem geometrycznym, którego n -tym wyrazem jest:

$$k_n = k \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$$

Taki sposób naliczania odsetek nazywany jest **procentem składanym**.

Kapitalizacja odsetek W matematyce finansowej, dopisywanie odsetek do podstawy kapitału od którego naliczane jest dalsze oprocentowanie nazywa się **kapitalizacją odsetek**. W przypadku lokat, gdzie występuje opisana wyżej sytuacja z procentem składanym, odsetki są kapitalizowane z określoną częstotliwością (na przykład co roku). W przypadku procentu prostego, kapitalizacja odsetek następuje tylko raz, w momencie zakończenia oszczędzania.

Problem 5.1. Zastanów się, który ze sposobów naliczania odsetek jest bardziej opłacalny dla klienta banku, w przypadku lokat oszczędnościowych oraz kredytów.

Problem 5.2 ()*. Podane wzory na procent składany są poprawne w przypadku rocznej kapitalizacji odsetek. Zastanów się, jak należy je zmodyfikować, aby były poprawne dla dowolnej częstotliwości kapitalizacji odsetek wynoszącej m miesięcy. Pamiętaj, że oprocentowanie p podaje się zazwyczaj w skali roku.

Uwaga 5.1. Większość lokat bankowych stosuje procent składany do naliczania odsetek. Jeśli więc w zadaniu nie sprecyzowano jak naliczane są odsetki, należy przyjąć że chodzi o procent składany.

5.1 Zadania

Zadanie 36. Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał w wysokości 3000 zł, złożony na trzy lata, jeżeli roczna stopa wynosi 6%, a odsetki są kapitalizowane:

- a) co pół roku, b) kwartalnie, c) miesięcznie, d) codziennie.

Zadanie 37. Oblicz ile będzie wynosił kapitał w wysokości 2000 zł złożony na procent składany na n lat, przy oprocentowaniu rocznym wynoszącym r procent.

Zadanie 31. Liczby $3.6; 2.5; \dots$ tworzą nieskończony ciąg geometryczny. Oblicz sumę tych wszystkich liczb.

Zadanie 32. Dla jakich wartości parametru k równanie:

$$3 \sin x + 9 \sin^2 x + 27 \sin^3 x + \dots = k + 4,$$

gdzie lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego, ma rozwiązanie?

Zadanie 33. Dla jakich wartości x ciąg geometryczny nieskończony $2, 3x - x^2, \dots$ jest zbieżny?

Zadanie 34. W kulę o promieniu R wpisano sześcian, w sześcian ten wpisano kulę, itd. w nieskończoność. Oblicz granicę, do której dąży suma pól powierzchni wszystkich kul.

Zadanie 35. Okres połowicznego rozkładu pierwiastka to okres, po którym z danej ilości pierwiastka pozostaje jego połowa. Dla radu (Ra 226) wynosi on 1560 lat. Ile lat co najmniej trzeba czekać, aby z $1g$ radu zostało mniej niż $1mg$?

5 Elementy matematyki finansowej

Z ciągami spotykamy się często w życiu codziennym w sytuacjach związanych z lokatami bankowymi i kredytowymi. Wpłacając do banku kwotę pieniędzy na lokatę długoterminową, możemy mieć do czynienia z tzw. procentem prostym (stałym) lub składanym.

Założmy, że wpłacamy do banku kapitał k , oprocentowany na $p\%$ w stosunku rocznym.

Procent prosty Założmy, że odsetki nie są dopisywane do kapitału po upływie każdego roku, tzn. co roku procent p liczony jest od kwoty kapitału początkowego. Po roku oszczędzania, nasz kapitał wyniesie $k(1 + \frac{p}{100})$. W następnym roku, kapitał wyniesie: $k(1 + \frac{p}{100}) + k \cdot \frac{p}{100} = k(1 + \frac{2p}{100})$. Ogólnie po upływie każdego roku do naszej lokaty dopisywana jest stała kwota wynosząca: $k \cdot \frac{p}{100}$. Zauważmy, że mamy tu do czynienia z ciągiem arytmetycznym o wyrazie ogólnym:

$$k_n = k \left(1 + \frac{n \cdot p}{100} \right).$$

Taki sposób naliczania odsetek nazywamy **procentem prostym** (stałym).

Czasem definicję ciągu ograniczonego formułuje się nieco inaczej podając pojęcia ograniczenia górnego i dolnego ciągu. Rzeczywiście, mówiąc o ciągu, że jest ograniczony można powiedzieć, że muszą istnieć liczby m i M rzeczywiste, takie, że dla dowolnego n zachodzi:

$$m \leq a_n \leq M.$$

Liczby m i M nazywamy wtedy odpowiednio ograniczeniem dolnym i górnym ciągu. Oczywiście obie definicje są równoważne.

Problem 1.2. Dlaczego obie definicje ciągu ograniczonego są równoważne?

Problem 1.3. Czy w definicji ciągu ograniczonego można zmienić nierówność $\leq$ na $<$?

Różnowartościowość

Definicja 1.4. Mówimy, że ciąg a jest różnowartościowy jeśli jest spełniony warunek:

$$a_n = a_k \iff n = k$$

Problem 1.4. Czy prawdą jest, że w ciągu różnowartościowym każdy wyraz występuje dokładnie jeden raz?

1.2 Granica ciągu

W poniższym podrozdziale zajmijmy się pojęciem zbieżności ciągów. Od tego momentu będziemy zakładać, że rozpatrywane ciągi są nieskończone. Pojęcie zbieżności nie ma bowiem sensu dla ciągów skończonych.

Definicja 1.5 (granica ciągu). Liczbę rzeczywistą g nazywamy granicą ciągu a gdy spełniony jest warunek:

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n > n_0} |a_n - g| < \varepsilon.$$

Granice ciągu a oznaczamy często przez $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ lub $\lim a_n$.

Problem 1.5. Spróbuj własnymi słowami omówić warunki jakie musi spełniać liczba g aby być granicą pewnego ciągu.

Z powyższej definicji wynika kilka bardzo ważnych faktów. Nie będziemy ich tutaj w żaden sposób uzasadniać (można spróbować przeprowadzić odpowiednie dowody jako ćwiczenia dla ambitnych i odważnych).

Fakt 1.6. *Każdy ciąg ma co najwyżej jedną granicę.*

Definicja 1.7. Jeśli ciąg a_n posiada granicę to mówimy, że jest zbieżny.

Fakt 1.8. *Ciąg stały jest zbieżny. Jego granicą jest jego jedyna wartość.*

Fakt 1.9. *Dodanie lub usunięcie z ciągu dowolnej, skończonej ilości wyrazów nie wpływa na jego zbieżność ani na wartość granicy (o ile takowa istnieje).*

Fakt 1.10. *Jeśli ciągi a_n oraz b_n są zbieżne, to ciągi $a_n \pm b_n$, $a_n \cdot b_n$ są również zbieżne. Gdy dodatkowo $\lim b_n \neq 0$, to zbieżny jest ciąg $\frac{a_n}{b_n}$.*

Ponadto zachodzą równości:

$$\begin{aligned}\lim(a_n \pm b_n) &= \lim a_n \pm \lim b_n \\ \lim(a_n \cdot b_n) &= \lim a_n \cdot \lim b_n \\ \lim \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\lim a_n}{\lim b_n}\end{aligned}$$

Wniosek 1.1. Jeśli $c \in \mathbb{R}$ oraz ciąg a_n jest zbieżny to ciąg $c \cdot a_n$ jest zbieżny oraz:

$$\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$$

Fakt 1.11. *Każdy ciąg który jest monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.*

Fakt 1.12. *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Ciągi rozbieżne Z powyższego faktu łatwo wywnioskować, że istnieje bardzo wiele ciągów, które nie są zbieżne (są to na przykład wszystkie ciągi, które nie są ograniczone). Okazuje się, że jest nawet gorzej – istnieją ciągi ograniczone, które nie są zbieżne.

Przykład 1.13. Ciąg $a_n = (-1)^n$ jest ograniczony, bo dla każdego n zachodzi $|a_n| = 1$. Nie jest natomiast zbieżny (żadna liczba nie spełnia definicji granicy ciągu).

Ciąg który nie jest zbieżny, czyli nie posiada skończonej granicy, nazywa się ciągiem rozbieżnym.

Wśród ciągów rozbieżnych, wyróżniamy specjalną klasę ciągów rozbieżnych do ∞ oraz $-\infty$.

Definicja 1.14. Mówimy, że ciąg a_n jest rozbieżny do ∞ (lub do $-\infty$) gdy dla dowolnej liczby rzeczywistej x istnieje taki wyraz ciągu, że wszystkie następne

Zadanie 24. Ciąg liczbowy (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{3-5n}{2}$. Uzasadnij z definicji, że jest to ciąg arytmetyczny.

Zadanie 25. Witek zjeżdża na sankach ze stoku. W pierwszej sekundzie sanki przebyły drogę $3m$, a w każdej następnej sekundzie o $0.2m$ więcej niż w poprzedniej. Jaką drogę przebyły sanki po 9 sekundach, przy założeniu, że na torze sanek nie znajdowały się żadne przeszkody (np. drzewa)?

Zadanie 26. Wyrazy pewnego ciągu geometrycznego (a_n) spełniają warunki:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 2 \\ a_4 + a_5 + a_6 = -2 \end{cases}$$

Aby wyznaczyć iloraz q tego ciągu, można postąpić w następujący sposób:

1. Zapisać drugie równanie w postaci: $q^3(a_1 + a_2 + a_3) = -2$.
2. Korzystając z równania pierwszego: $a_1 + a_2 + a_3 = 2 \dots$
3. ... zapisać równanie: $q^3 = -1$.
4. Stąd wyliczyć, że $q = -1$.

Postępując analogicznie, wyznacz iloraz q ciągu geometrycznego (b_n) , którego kolejne wyrazy $b_3, b_4, \dots, b_8$ spełniają warunki:

$$\begin{cases} b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 2 \\ b_5 + b_6 + b_7 + b_8 = 8 \end{cases}$$

Zadanie 27. Marta kupiła na raty telewizor. Każda kolejna rata była mniejsza od poprzedniej o taką samą kwotę. Ile zapłaciła Marta za telewizor, jeśli spłacała go w 7 ratach, a czwarta rata była równa 350 zł?

Zadanie 28. Ile wyrazów ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{13n-4}{30-2n}$ jest większych niż 80? Podaj te wyrazy.

Zadanie 29. Uzasadnij, że ciąg (a_n) dany wzorem ogólnym $a_n = 2^{3n-1}$ jest ciągiem geometrycznym.

Zadanie 30. Oblicz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1)}{3n^2 - 4n + 10}$$

Zadanie 14. Cztery liczby tworzą ciąg geometryczny. Znaleźć ten ciąg wiedząc, że suma wyrazów skrajnych jest równa 36, zaś suma wyrazów środkowych 24.

Zadanie 15. Między liczby 27 i $\frac{1}{3}$ wstaw trzy takie liczby, aby z danymi liczbami tworzyły ciąg geometryczny.

Zadanie 16 (*). Cztery liczby tworzą ciąg geometryczny. Iloczyn logarytmów dziesiętnych pierwszej i czwartej liczby wynosi 8, a iloczyn logarytmów drugiej i trzeciej liczby wynosi 0. Znajdź te liczby.

Zadanie 17 (*). Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny jest równa 62. Suma logarytmów dziesiętnych tych liczb jest równa 3. Wyznacz ten ciąg.

Zadanie 18. Dany jest ciąg geometryczny postaci:

$$2, \frac{2}{p-1}, \frac{2}{(p-1)^2}, \frac{2}{(p-1)^3}, \dots$$

Wyznacz wszystkie wartości p , dla których granicą tego ciągu jest liczba:

- a) 0, b) 2.

4 Zadanie różne

Zadanie 19. Trzy kolejne liczby tworzą ciąg geometryczny. Ich suma wynosi $3\frac{1}{2}$. Jeżeli do drugiej dodamy $\frac{1}{4}$, a pozostałe zostawimy bez zmiany, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Znajdź te liczby.

Zadanie 20. Trzy liczby x, y, z , których suma jest równa 26 tworzą ciąg geometryczny. Liczby $x+1, y+6, z+3$ tworzą ciąg arytmetyczny. Znajdź te liczby.

Zadanie 21. Między liczby 2 i 12 wstaw dwie liczby tak, aby trzy pierwsze tworzyły ciąg geometryczny, a trzy ostatnie ciąg arytmetyczny.

Zadanie 22. Wyznacz dwa ciągi: arytmetyczny a_1, a_2, a_3 i geometryczny b_1, b_2, b_3 takie, że:

$$a_1b_1 = 1, a_2b_2 = 4, a_3b_3 = 12, a_1 + a_2 + a_3 = 6.$$

Zadanie 23. Balon wzniósł się w pierwszej minucie na wysokość 64m a w każdej następnej, przyrost wysokości był dwa razy mniejszy niż w poprzedniej. Na jakiej wysokości był balon po 8 minutach?

wyrazy są większe (mniejsze) od tego x . Piszemy wówczas: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$) i mówimy, że ciąg posiada granicę „niewłaściwą”¹.

Więcej informacji o granicach ciągów, w tym metody ich obliczania musicz znaleźć we własnym zakresie. Polecamy w tym celu stronę: <http://www.matematyka.org>.

1.3 Zadania

Zadanie 1. Wśród poniższych ciągów wskaż ciągi: ograniczone, monotoniczne (napisz jaki to rodzaj monotoniczności), różnowartościowe, zbieżne, rozbieżne do $\pm\infty$:

- a) $a_n = 2 \cdot n - 1$ c) $c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ e) $e_n = \sin(n)$
 b) $b_n = 2^{n+1}$ d) $d_n = (-2)^n$ f) $f_n = n^2 + 4n + 4$

Zadanie 2. Oblicz granicę ciągów (lub napisz że nie istnieje).

- a) $a_n = \frac{1}{2n+1}$ c) $c_n = \frac{5n^2 - 1000n + 13}{2n^2 + 256n - 11}$ e) $e_n = \sqrt{2n + 3}$
 b) $b_n = \frac{n^3 - 100n^2 + 1}{n^2 + 10}$ d) $d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ f) $f_n = \sqrt{\frac{10n^2 - 1}{5n + 2}}$

2 Ciąg arytmetyczny

2.1 Definicje

Ciąg arytmetyczny jest szczególnym ciągiem, który spełnia poniższą (zupełnie nie formalną) definicję.

Definicja 2.1 (ciąg arytmetyczny). Ciąg arytmetyczny jest to ciąg, w którym każdy (poza pierwszym) wyraz powstaje poprzez dodanie stałej, ustalonej liczby r do wyrazu poprzedniego:

$$a_1 \xrightarrow{+r} a_2 \xrightarrow{+r} a_3 \xrightarrow{+r} a_4 \xrightarrow{+r} \dots$$

Liczbę r nazywamy wtedy różnicą ciągu arytmetycznego.

¹W niektórych podręcznikach można spotkać się z określeniem, że ciąg jest zbieżny do ∞ . My będziemy jednak mówić, że ciąg jest rozbieżny do ∞ co znaczy tyle samo, jednak podkreśla, że dany ciąg nie spełnia podanej wcześniej definicji zbieżności.

Uwaga 2.2. Ciąg arytmetyczny może być skończony bądź nieskończony. Jeśli jest to ciąg nieskończony to:

$$\text{dla każdego } n \in \mathbb{N}_+ \quad a_{n+1} = a_n + r.$$

Jeśli ciąg jest skończony i ma powiedzmy k wyrazów, to:

$$\text{dla każdego } n=1,2,3,\dots,k-1 \quad a_{n+1} = a_n + r.$$

2.2 Własności ciągu arytmetycznego

Fakt 2.3. Dla ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r wzór ogólny ciągu ma postać:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Problem 2.1. Czy potrafisz udowodnić powyższy fakt? (Wskazówka: przeprwadź dowód indukcyjny).

Ciąg arytmetyczny należy utożsamiać z funkcją liniową. Zauważmy bowiem, że z faktu podanego wyżej wynika, że: $a_n = nr + a_1 - r$. Jeśli teraz, mówiąc obrazowo, zamienimy literkę n na x a literkę a na określenie jakiegoś funkcji, np. f to otrzymamy wzór bardzo podobny do typowego wzoru funkcji liniowej. Reasumując, ciąg arytmetyczny jest funkcją daną wzorem funkcji liniowej z dziedziną liczb naturalnych.

Fakt 2.4. Ciąg jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy może być zadany wzorem funkcji liniowej.

Uwaga 2.5. Trzy liczby a, b, c tworzą ciąg arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$c - b = b - a$$

a stąd $b = \frac{a+c}{2}$ (czyli wyraz środkowy jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich).

Uwaga 2.6. Ogólnie, ciąg (a_n) jest arytmetyczny, gdy dla każdego n zachodzi:

$$a_{n+1} - a_n \text{ jest stałe (tzn. nie zależy od } n\text{)}.$$

Przykład 2.7. Ciąg dany wzorem ogólnym $a_n = 4n - 3$ jest ciągiem arytmetycznym, bo

$$a_{n+1} - a_n = 4(n+1) - 3 - (4n - 3) = 4.$$

Natomiast ciąg $a_n = n^2$ nie jest ciągiem arytmetycznym, gdyż:

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1.$$

Przykład 3.13. Korzystając z danego wzoru, policzymy następującą sumę:

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \dots + 1024 + 2048.$$

Zauważmy że dodawane liczby tworzą ciąg geometryczny $a_1, a_2, \dots, a_n$, w którym $a_1 = 2$, $q = 2$, $a_n = 2048$. Aby obliczyć liczbę wyrazów tego ciągu wykorzystamy wzór:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Zatem:

$$2048 = 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$2048 = 2^n$$

$$n = 11$$

Stąd, szukana suma równa jest:

$$S_{11} = 2 \cdot \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 2 \cdot \frac{1 - 2048}{1 - 2} = 2 \cdot 2047 = 4094.$$

Wskazówka: W czasie rozwiązywania zadań dotyczących ciągu geometrycznego, wszelkie „dane” i „szukane” przedstaw w postaci oznaczeń: a_1, q itp. Ułatwia to koncentrację i kojarzenie odpowiednich wzorów i relacji między wielkościami.

3.4 Zadania

Zadanie 9. Trójka liczb całkowitych tworzy ciąg geometryczny o ilorazie całkowitym. Gdy najmniejszą z nich zwiększymy o 9, to powstanie ciąg arytmetyczny. Jak to liczby?

Zadanie 10. Piłka, odbijając się od ziemi osiąga za każdym razem wysokość wynoszącą $\frac{3}{5}$ poprzedniej. Jak wysoko wzniosła się piłka po pierwszym uderzeniu, jeśli po czwartym odbiła się na wysokość 27 cm?

Zadanie 11. Podaj wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o wyrazach: $12, 4, \frac{4}{3}$.

Zadanie 12. Liczby b, c, d tworzą ciąg geometryczny. Wielomian: $W(x) = x^3 - bx^2 + cx + d$ jest podzielny przez $x^2 - 1$. Znajdź liczby b, c, d .

Zadanie 13. Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny jest równa 62, a iloczyn jest równy 1000. Wyznacz ten ciąg.

A stąd wynika wzór:

$$b^2 = a \cdot c.$$

Fakt 3.7. *Każdy wyraz ciągu geometrycznego, oprócz pierwszego i ostatniego (o ile taki istnieje) ma tę własność, że jego kwadrat jest równy iloczynowi wyrazów sąsiadnych:*

$$a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}.$$

Fakt 3.8. *Jeżeli wyrazy ciągu geometrycznego są nieujemne, to każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego i ostatniego (o ile taki istnieje) jest średnią geometryczną wyrazów sąsiadnych:*

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}.$$

Przykład 3.9. Ciąg dany wzorem ogólnym $a_n = 7 \cdot 10^n$ jest ciągiem geometrycznym, bo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{7 \cdot 10^{n+1}}{7 \cdot 10^n} = 10.$$

Natomiast ciąg $a_n = 1 + 10^n$ nie jest ciągiem geometrycznym gdyż:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 + 10^{n+1}}{1 + 10^n} \text{ nie jest stałe.}$$

Fakt 3.10 (monotoniczność ciągu geometrycznego). *Jeśli $q > 1$ to ciąg geometryczny jest monotoniczny:*

- jeśli $q > 1 \wedge a_1 > 0$ lub jeśli $1 > q > 0 \wedge a_1 < 0$, to ciąg jest rosnący,
- jeśli $q = 1 \vee q = 0$, to ciąg jest stały,
- jeśli $1 > q > 0 \wedge a_1 < 0$ lub jeśli $q > 1 \wedge a_1 < 0$, to ciąg jest malejący.

3.3 Suma ciągu geometrycznego

Fakt 3.11. *Suma k początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) jest równa:*

$$S_k = a_1 \frac{1 - q^k}{1 - q}.$$

Wzór jest poprawny gdy $q \neq 1$.

Uwaga 3.12. Oczywiście gdy $q = 1$, ciąg geometryczny jest ciągiem stałym i sumę k wyrazów liczymy z wzoru $S_k = k \cdot a_1$.

2.3 Suma ciągu arytmetycznego

Fakt 2.8. *Każdy ciąg arytmetyczny jest monotoniczny:*

- jeśli $r > 0$, to ciąg jest rosnący,
- jeśli $r = 0$, to ciąg jest stały,
- jeśli $r < 0$, to ciąg jest malejący.

2.3 Suma ciągu arytmetycznego

Fakt 2.9. *Suma k początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa:*

$$S_k = \frac{a_1 + a_k}{2} k.$$

Sens powyższego faktu jest prosty. Suma pewnej liczby kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego równa się średniej arytmetycznej pierwszego i ostatniego z tych wyrazów, pomnożonej przez liczbę tych wyrazów.

Przykład 2.10. Korzystając z danego wzoru, policzmy następującą sumę:

$$5 + 11 + 17 + \dots + 65.$$

Zauważmy że dodawane liczby tworzą ciąg arytmetyczny $a_1, a_2, \dots, a_n$, w którym $a_1 = 5$, $r = 6$, $a_n = 65$. Aby obliczyć liczbę wyrazów tego ciągu wykorzystamy wzór:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

Zatem:

$$65 = 5 + (n - 1) \cdot 6$$

$$n = 11$$

Stąd, szukana suma równa jest:

$$S_{11} = \frac{5 + 65}{2} \cdot 11 = 385.$$

Jak pokazuje przykład, ciągi arytmetyczne są często pomocne w zadaniach, w których treści nie ma mowy nie o żadnym ciągu (zauważ, że zadanie z przykładu brzmiało, „oblicz daną sumę”). Dlatego, aby ułatwić rozwiązywanie różnych zadań, w których pojawia się ciąg arytmetyczny, warto pamiętać o tym, co mówi poniższa wskazówka.

Wskazówka: W czasie rozwiązywania zadań dotyczących ciągu arytmetycznego, wszelkie „dane” i „szukane” przedstaw w postaci oznaczeń: a_1, r itp. Ułatwia to koncentrację i kojarzenie odpowiednich wzorów i relacji między wielkościami.

2.4 Zadania

Zadanie 3. Oblicz wyraz pierwszy, różnicę ciągu arytmetycznego i sumę 10 pierwszych wyrazów, gdy:

a) $a_6 = 20, a_{10} = 4,$

b) $a_5 = 20, a_9 = 36,$

c) $a_4 = 5, a_{11} = 34.$

Zadanie 4. Dla jakich wartości x podane liczby są kolejnym wyrazami ciągu arytmetycznego? Podaj te wyrazy:

a) $2x - 1, 2x + 5, 3x + 4,$

b) $(x + 1)^2, (2x + 1)^2, (3x - 1)^2.$

Zadanie 5. Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych które:

a) są podzielne przez 3,

b) są niepodzielne przez 5,

c) przy dzieleniu przez 6 dają resztę 4.

Zadanie 6. Czwarty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 6. Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 7. Drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 4, a czwarty wynosi 16. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów o numerach parzystych.

Zadanie 8. Ciąg arytmetyczny składa się z 16 wyrazów. Suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 256, a suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 240. Oblicz pierwszy i ostatni wyraz tego ciągu.

3 Ciąg geometryczny

3.1 Definicje

Ciąg geometryczny, podobnie jak arytmetyczny, jest szczególnym ciągiem, który spełnia poniższą (zupełnie nie formalną) definicję.

Definicja 3.1 (ciąg geometryczny). Ciąg geometryczny jest to ciąg, w którym każdy (poza pierwszym) wyraz powstaje poprzez pomnożenie przez pewną stałą, ustaloną liczbę q wyrazu poprzedniego:

$$a_1 \xrightarrow{q} a_2 \xrightarrow{q} a_3 \xrightarrow{q} a_4 \xrightarrow{q} \dots$$

Liczbę q nazywamy wtedy ilorzem ciągu geometrycznego.

Uwaga 3.2. Ciąg geometryczny może być skończony bądź nieskończony. Jeśli jest to ciąg nieskończony to:

$$\text{dla każdego } n \in \mathbb{N}_+ \quad a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Jeśli ciąg jest skończony i ma powiedzmy k wyrazów, to:

$$\text{dla każdego } n=1,2,3,\dots,k-1 \quad a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

3.2 Własności ciągu geometrycznego

Fakt 3.3. Dla ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q wzór ogólny ciągu ma postać:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Problem 3.1. Czy potrafisz udowodnić powyższy fakt? (Wskazówka: przeprowadź dowód indukcyjny).

Fakt 3.4. Ciąg jest cięgiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy gdy jest dany wzorem funkcji wykładniczej.

Fakt 3.5. Ogólnie, ciąg (a_n) jest geometryczny, gdy dla każdego n zachodzi:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \text{iloraz jest stały (tzn. nie zależy od } n\text{)}.$$

Uwaga 3.6. Trzy liczby a, b, c (przy założeniu $a \neq 0 \wedge b \neq 0$) tworzą ciąg arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a}.$$