

- b) ma jeden pierwiastek wymierny, dwa niewymierne,
 c) ma dwa pierwiastki wymierne i jeden niewymierny.

Zadanie 50. Czy wielomian $x^4 + a^4$ jest równy wielomianowi:

- a) $(x - a)(x + a)(x^2 - ax + a^2)$,
 b) $(x^2 + a^2)(x^2 + ax + a^2)$,
 c) $(x^2 + \sqrt{2}ax + a^2)(x^2 - \sqrt{2}ax + a^2)$.

6 Ogłoszenia

6.1 Zadanie domowe

Proszę wykonać **przynajmniej** 21 spośród podanych tu zadań. Zadania oddajemy na podpisanych kartkach, najlepiej formatu A4. **Proszę pilnować czytelności oraz opisywać swoje rozumowania i obliczenia — pamiętajcie o komentarzach!**

6.2 Ogłoszenia drobne

Niebawem planujemy w Oratorium uruchomić specjalne zajęcia, które można by nazwać w skrócie kółkiem matematyczno-informatycznym. Tematyką zajęć będą różnego typu zagadnienia i zadania związane zarówno z czystą matematyką (nietypowe zadania) jak i z podstawami informatyki (programowanie). Zajęcia odbywać się będą raz w tygodniu, w poniedziałek, wtorek, środę lub czwartek. Zajęcia będą bezpłatne – wstęp wolny dla wszystkich uczniów i uczennic;) liceum (z klas 1-3). Termin pierwsze spotkanie zostanie podany niebawem!

Zapraszamy również na Targi Akademii 2006 w dniach 20-22.03.2006 na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki UG, oraz na dzień otwarty Politechniki Gdańskiej w dniu 20.03.2006 w godzinach 10.00-18.00. Więcej informacji: www.univ.gda.pl/akademia oraz www.pg.gda.pl.

W sposób szczególny zapraszamy w dniu 20.03.2006 w godzinach 10.00-13.00 na warsztaty „Origami matematyczne”, które odbywają się w ramach Targów Akademii. Warsztaty odbywają się na wydziale Mat-Fiz-Inf, w sali 208 (oczywiście wstęp wolny). A to co będzie na warsztatach można zobaczyć tu: www.origami.psisuk.pl.

Wielomiany

Kurs matematyki w ORATORIUM

autorami materiałów są: dr Barbara Wołnik i Witold Bolt

17 marca 2006

Spis treści

1	Podstawowe pojęcia	1
2	Wykresy i własności	2
2.1	Wielomian trzeciego stopnia	3
3	Twierdzenia dotyczące wielomianów	4
4	Wiadomości dodatkowe	4
4.1	Sposoby dzielenia wielomianów	4
4.2	Równość wielomianów	6
4.3	Wielokrotne pierwiastki wielomianu	7
4.4	Uogólnione wzory Viete’a	9
5	Zadania	10
5.1	Zadania otwarte	10
5.2	Zadania testowe	15
6	Ogłoszenia	20
6.1	Zadanie domowe	20
6.2	Ogłoszenia drobne	20

1 Podstawowe pojęcia

Definicja 1.1. Wielomianem stopnia n ($n \in \mathbb{N}$) będziemy nazywać każdą funkcję $W: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_n \neq 0$ oraz $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Liczby $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ zwykle nazywać się współczynniki. Liczba a_0 często nazywana jest również wyrazem wolnym.

Przykład 1.2. Funkcja $W(x) = 3x^7 + 4x - 2$ jest wielomianem stopnia 7.

Przykład 1.3. Funkcja $W(x) = (m-3)x^6 + 4x^5 - 3x + 14$ jest wielomianem, ale stopień tego wielomianu zależy od wartości parametru m : dla $m \neq 3$ stopień $W(x)$ wynosi 6 natomiast dla $m = 3$ stopień $W(x)$ wynosi 5.

Uwaga 1.4 (funkcja liniowa i kwadratowa jako wielomiany). Funkcje liniowa i kwadratowa są wielomianami. Funkcja kwadratowa jest wielomianem stopnia 2, funkcja liniowa postaci $f(x) = ax + b$, gdzie $a \neq 0$ jest oczywiście wielomianem stopnia 1, jeśli $a = 0$ oraz $b \neq 0$ to jest to wielomian stopnia 0. Dodatkowo przyjmujemy się, że funkcja $f(x) = 0$ też jest wielomianem, a jego stopień wynosi $-\infty$.

2 Wykresy i własności

Wykresen wielomianu jest krzywa, która przypomina nieskończenie długi drut, który dla prostoty, będziemy w tej książce określać jako „wężyk”. Warto wiedzieć, że dla każdego wielomianu zachodzi kilka faktów odnośnie jego wykresu i własności:

- ilość miejsc zerowych wielomianu nie przekracza jego stopnia,
- ilość ekstremów lokalnych wielomianu jest mniejsza od jego stopnia.

Co więcej wiemy, że:

a) jeśli stopień wielomianu n jest parzysty, to:

- oba ramiona „wężyka” są skierowane w tą samą stronę (gdzie $a_n > 0$ to w górę, a gdzie $a_n < 0$ to w dół),
- może w ogóle nie być miejsc zerowych,
- jest nieparzysta ilość ekstremów, tzn. jedno, trzy, $\dots$ lub $n - 1$.

b) jeśli stopień wielomianu n jest nieparzysty, to:

- jedno ramię „wężyka” jest skierowane w górę, a drugie w dół (kierunek prawego ramienia wyznaczamy z współczynnika a_n),

- 12,
- 18.

Zadanie 44. Niech $f(x) = x^3 - mx^2 + x$ (gdzie m jest parametrem).

- Jeśli $m = -2$ to funkcja f ma dwa ekstrema lokalne.
- Jeśli $m = -\sqrt{3}$ to funkcja f ma jedno ekstremum lokalne.
- Jeśli $m \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ to funkcja jest rosnąca w zbiorze $\mathbb{R}$.

Zadanie 45. Wykres funkcji $y = 2(x-3)^2 - 3$ otrzymamy z wykresu funkcji $y = 2x^2$ w wyniku przesunięcia o wektor:

- $\vec{u} = [3, 3]$,
- $\vec{u} = [-3, -3]$,
- $\vec{u} = [3, -3]$.

Zadanie 46. Dane jest równanie: $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$.

- pierwiastkiem tego równania jest -1,
- równanie to ma pierwiastek dwukrotny,
- równanie to ma pierwiastek trzykrotny.

Zadanie 47. Niech będzie dany wielomian $W(x) = (1 - x + x^2)^{25}$. Wówczas:

- W nie ma pierwiastków rzeczywistych,
- pochodna tego wielomianu nie ma pierwiastków rzeczywistych,
- funkcja $W(x)$ jest malejąca w $(-\infty; 0.5)$.

Zadanie 48. Wielomian $(x-2)^{10} + (x-1)^5 - 1$ jest podzielny przez:

- dwumian $x - 2$,
- trójmian $(x-2)(x-1)$,
- wielomian $x(x-1)(x-2)$.

Zadanie 49. Równanie $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$:

- nie ma pierwiastków wymiernych,

- a) $f(\sqrt{5}) = 15$,
 b) funkcja f jest parzysta,
 c) funkcja f jest nieparzysta.

Zadanie 39. Wiadomo, że $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ma 4 pierwiastki. Wynika stąd, że:

- a) dwa z nich są dodatnie, a dwa ujemne,
 b) suma tych pierwiastków jest równa $-\frac{b}{a}$,
 c) suma tych pierwiastków równa jest zero.

Zadanie 40. Dany jest wielomian $W(x) = (x+1)^{2002} - x^{2002} - 2x - 1$. Jest on podzielny przez:

- a) $x(x+1)$,
 b) $(x+1)(x-1)$,
 c) $2x+1$.

Zadanie 41. Wielomian $W(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ nie ma pierwiastków:

- a) dodatnich,
 b) całkowitych,
 c) rzeczywistych.

Zadanie 42. Niech wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + b$ spełnia warunek $W(-x) = -W(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wynika stąd, że:

- a) zero jest pierwiastkiem tego wielomianu,
 b) $a = 0$ i $b = 0$,
 c) wielomian ten ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste.

Zadanie 43. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 + 2x^2 - 6x + a$ przez $x - 3$ jest równa 3. Wówczas reszta z dzielenia tego wielomianu przez $x + 2$ jest równa:

- a) -2,

- musi być przynajmniej jedno miejsce zerowe,
- jest parzysta ilość ekstremów lokalnych (tyle samo maksimów co minimów), tzn: zero, dwa, ..., lub $n - 1$.

Fakt 2.1. *Wielomian jest funkcją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy „składa się” wyłącznie z potęg parzystych (np. $W(x) = ax^6 + bx^4 + cx^2 + d$). Wielomian jest funkcją nieparzystą wtedy i tylko wtedy, gdy „składa się” wyłącznie z potęg nieparzystych (np. $Q(x) = ax^7 + bx^3 + cx$).*

Uwaga 2.2. Wyraz wolny wielomianu to oczywiście potęga zerowa, czyli parzysta.

Wniosek: Jeśli we wzorze wielomianu występują zarówno potęgi parzyste jak i nie parzyste, to nie jest on określony względem parzystości (nie jest, ani parzysty, ani nieparzysty).

2.1 Wielomian trzeciego stopnia

Podczas rozwiązywania różnych zadań często mamy do czynienia z wielomianem stopnia 3. Ze względu na jego szczególny charakter, poniżej zebrano różne jego własności. Należy jednak zaznaczyć, że zazwyczaj odnoszą się one tylko do wielomianów stopnia trzy.

Własności wielomianu trzeciego stopnia. Wielomian trzeciego stopnia ma następujące własności:

1. Wielomian stopnia 3 może mieć jedynie jedno, dwa lub trzy miejsca zerowe.
2. Wielomian stopnia 3 albo ma dwa ekstrema (jedno minimum i jedno maksimum) albo nie ma ich wcale (i wtedy jest funkcją monotoniczną). Zauważmy, że jeśli wielomian ma postać $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ oraz $a \neq 0$, to pochodna tego wielomianu ma postać: $W'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Można policzyć Δ dla pochodnej. Jeśli Δ jest dodatnia, to pochodna ma dwa miejsca zerowe, więc badany wielomian ma dwa ekstrema. Jeśli jednak $\Delta \leq 0$ to badany wielomian W jest monotoniczny (pochodna ma stały znak) i w zależności od wartości a może być stale rosnący lub stale malejący.

Problem 2.1. Zastanów się ile miejsc zerowych może mieć dowolna funkcja (nie koniecznie wielomian!), która jest monotoniczna - to znaczy jest rosnąca, lub malejąca, lub stała w całej swej dziedzinie.

3 Twierdzenia dotyczące wielomianów

W tym podrozdziale zebrano najważniejsze twierdzenia dotyczące wielomianów. Zapoznaj się z treścią tych twierdzeń i sprawdź czy dokładnie rozumiesz ich treść. Dobre poznanie tych twierdzeń jest o tyle ważne, że większość zadań o wielomianach (lub zadań w których w jakiś postaci pojawiają się wielomiany) wymaga użyć niektórych z nich.

Twierdzenie 3.1 (o rozkładzie). *Każdy wielomian można rozłożyć na iloczyn czynników stopnia nie większego niż 2.*

Przykład 3.2. Rozłóżmy kilka wielomianów na czynniki.

1. $x^6 - 6x^5 + 9x^4 = x^4(x^2 - 6x + 9) = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot (x - 3) \cdot (x - 3)$,
2. $6x^5 - x^4 + x^3 = x \cdot x \cdot x \cdot (6x^2 - x + 1)$,
3. $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$.

Twierdzenie 3.3 (o dzieleniu wielomianów). *Jeśli wielomian $W(x)$ dzielimy przez $Q(x)$ i dostajemy wynik $P(x)$ i resztę $R(x)$, to:*

$$W(x) = P(x)Q(x) + R(x).$$

Co więcej stopień $R(x)$ jest mniejszy niż stopień $Q(x)$.

Twierdzenie 3.4 (twierdzenie Bezout'e'a). *Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - a)$.*

Twierdzenie 3.5 (rozszerzone twierdzenie Bezout'e'a). *Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x - a)$ wynosi $W(a)$.*

Twierdzenie 3.6 (o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych). *Jeśli liczba $\frac{p}{q}$, gdzie p, q to liczby całkowite, jest pierwiastkiem wielomianu $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, gdzie wszystkie współczynniki są całkowite, to p jest podzielnikiem a_0 , natomiast q jest podzielnikiem a_n ,*

4 Wiadomości dodatkowe

4.1 Sposoby dzielenia wielomianów

W twierdzeniach z poprzedniego punktu często była mowa o tym, że jeden wielomian jest podzielny przez drugi, lub że dzielimy jeden wielomian przez

c) dla dowolnego $p \in \mathbb{R}$.

Zadanie 33. Dany jest wielomian: $W(x) = x^3 - 3x^2 + ax - 9$. Jest on podzielny przez dwumian $x - 3$, zatem:

- a) $a = 3$,
- b) jedynym pierwiastkiem $W(x)$ jest liczba 3,
- c) dla każdej liczby całkowitej n podzielnej przez 3 liczba $W(n)$ jest podzielna przez 3.

Zadanie 34. Zbiór rozwiązań nierówności: $(x - 1)(x - 2)^2(x - 3) < 0$ jest:

- a) zawarty w zbiorze rozwiązań nierówności: $(x - 1)(x - 3) < 0$,
- b) równy zbiorowi rozwiązań nierówności: $(x - 1)(x - 3) < 0$,
- c) równy $(-\infty, 1) \cup (2, 3)$.

Zadanie 35. Funkcja $f(x) = x^3 - 3x^2 + 12x - 15$ dla $x \in \mathbb{R}$:

- a) ma dwa ekstrema lokalne,
- b) jest malejąca w $(-\infty, 1)$,
- c) jest rosnąca w zbiorze $\mathbb{R}$.

Zadanie 36. Wielomian $W(x) = (2x - 1)^{10}$:

- a) jest wielomianem stopnia 20,
- b) ma współczynnik przy najwyższej potędze równy 1024,
- c) ma sumę współczynników równą 1023.

Zadanie 37. Niech $W(x) = (x + 1)^2$. Liczba r jest resztą z dzielenia wielomianu W przez dwumian $x - p$. Wtedy:

- a) $r = p^2 + 2p + 1$,
- b) $r \geq 0$,
- c) $r = 0$.

Zadanie 38. Niech będzie dany wielomian $W(x) = x^2 - 1$, oraz funkcja $f(x) = W(W(x))$. Podaj jawny wzór funkcji f oraz sprawdź czy:

- a) jedna z nich jest parzysta a druga nieparzysta?
- b) wykres f jest symetryczny do wykresu g względem osi OX ?
- c) wykres f jest symetryczny do wykresu g względem punktu $(0, 0)$?

Zadanie 28. Wielomian $x^3 - (m + 4)x - 2m$ jest podzielny przez $x - m$. Wówczas:

- a) m jest liczbą całkowitą,
- b) $m = 3$,
- c) $m \geq 0$?

Zadanie 29. Dana jest nierówność: $px - p^3 - p \geq 0$ (z niewiadomą x). Jej zbiorem jest rozwiązań jest $(-\infty, -2)$. Zatem:

- a) $p \geq 0$,
- b) $p = -1$,
- c) $p^2 = 1$.

Zadanie 30. Dany jest wielomian: $W(x) = x^3 - 2002x^2 + 2002x$. Czy:

- a) suma pierwiastków W jest nieujemna?
- b) suma pierwiastków W jest równa ich iloczynowi?
- c) suma kwadratów pierwiastków jest większa od 1000000?

Zadanie 31. Funkcja $mx^3 - nx^2$ ($mn \neq 0$) posiada maksimum lokalne w $x = 2$. Zatem:

- a) $|m| < |n|$,
- b) funkcja ta posiada maksimum lokalne,
- c) funkcja jest monotoniczna w $(-\infty, -1)$?

Zadanie 32. Liczba $p \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem równania (z niewiadomą x): $x^3 - px^2 + 2x - 2p = 0$:

- a) jedynie dla $p = 0$,
- b) jedynie dla $p = 0$ lub $p = 2$,

drugi. Tutaj zajmujemy się krótko technicznymi możliwościami wykonania takich dzielen.

Dzielenie wielomianów przypomina dzielenie w zbiorze liczb całkowitych lub naturalnych (i jak się okazuje, obie te rzeczy mają bardzo wiele wspólnego). Wynikiem dzielenia dwóch wielomianów jest bowiem zawsze wielomian, oraz może zdarzyć się tak, że pojawia się dodatkowy wielomian zwany resztą — w przypadku gdy dzielenia nie da się wykonać.

Najbardziej powszechną i uniwersalną metodą dzielenia wielomianów jest dzielnie tzw. pisemne, która działa analogicznie do dzielenia pisemnego liczb naturalnych które znamy ze szkoły podstawowej.

Problem 4.1. Przypomnij sobie jak wykonywać dzielenie wielomianów metodą pisemną.

Dzielenie pisemne ma liczne zalety. Najważniejsze jest to, że metoda ta zawsze działa. Niestety jednak dużą wadą jest to, iż obliczenia bywają nieraz żmudne. Poznajemy więc inną metodę.

Metoda Hornera. Jest to metoda pozwalająca dzielić dowolny wielomian $W(x)$ przez jednomian postaci $(x - p)$, gdzie $p \in \mathbb{R}$. Nie będziemy tutaj podawać dokładnego opisu tej metody, ani dowodu poprawności jej działania (takie informacje — a szczególnie „skąd to wszystko się bierze” można znaleźć w Internetecie¹), zamiast tego pokażemy na przykładzie jak się tą metodę stosuje. Z resztą, powinna już być dość dobrze znana ze szkoły.

Przykład 4.1. Podzielmy wielomian $W(x) = 7x^4 + 5x^2 + 3x + 1$ przez $Q(x) = x + 2$. Zaczynamy od zapisania tablicy. W pierwszym jej wierszu (poczynając od drugiej kolumny) zapisujemy współczynniki wielomianu, pamiętając o tym by wypisać również te równe 0. W pierwszej kolumnie drugiego wiersza zapisujemy liczbę p , a w drugiej kolumnie 0. W ostatnim wierszu przepisujemy pierwszy współczynnik — niezmienny.

	7	0	5	3	1
-2	0				
	7				

Następnie z ostatniego wiersza bierzemy pierwszą (w tym przypadku jedyną) liczbę od strony prawej, mnożymy ją przez -2 i wpisujemy w środkowym

¹Polecany stronę <http://www.matematyka.org>, dział: licealista, algebra, wielomiany, oraz encyklopedię internetową Wikipedię <http://pl.wikipedia.org>. Schemat Hornera opisano w Wikipedii bardzo szczegółowo: http://pl.wikipedia.org/wiki/Schemat_Hornera.

rzędzie w pierwszym wolnym miejscu począwszy od strony lewej. Sumujemy wyraży w kolumnie do której właśnie wpisaliśmy wynik mnożenia, i sumę zapisujemy w ostatnim wierszu. To postępowanie powtarzamy aż do wypełnienia tabeli.

	7	0	5	3	1
-2	0	-14	28	-66	126
7	-14	33	-63	127	

Teraz pozostaje odczytanie wyniku. Wynikiem dzielenia jest wielomian $V(x)$ o stopniu dokładnie o jeden mniejszym od stopnia wielomianu $W(x)$. O współczynnikach zapisanych w ostatnim wierszu, w kolumnach od drugiej do przedostatniej:

$$V(x) = 7x^3 - 14x^2 + 33x - 63.$$

Pozostała ostatnia komórka w ostatnim wierszu jest resztą.

Uwaga 4.2. Są różne sposoby zapisu tabelki dzielenia wielomianów metodą Hornera. Na stronie www.matematyka.org przedstawiono na przykład nieco inny sposób tylko z dwoma wierszami. Sposób prezentowany tutaj pomaga jednak uniknąć wiele błędów rachunkowych. Oczywiście sama metoda/schemat są takie same niezależnie od tego jaką tabelkę się stosuje — idea pozostaje bez zmian!

4.2 Równość wielomianów

Definicja 4.3 (równość wielomianów). Mówimy, że dwa wielomiany są równe, gdy są tego samego stopnia oraz gdy mają takie same współczynniki przy wszystkich potęgach.

Przykład 4.4. Wielomiany $W(x) = x^4 + 3x^2 - 7$ jest równy wielomianowi $V(x) = kx^5 + x^4 + ax^2 - 7$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k = 0$ oraz $a = 3$.

Fakt 4.5 (o równości wielomianów). *Jeśli dwa wielomiany stopnia co najwyżej n mają takie same wartości dla $n + 1$ argumentów, to są równe.*

Przykład 4.6. Załóżmy, że wielomiany: $W(x) = a(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)(x-2)$ oraz $G(x) = 5x^2 - 19x = 18$ są równe. Zastanówmy się jakie w takim razie muszą być wartości parametrów a, b, c .

Po pierwsze zauważamy, że wielomian G jest stopnia 2, natomiast wielomian W jest stopnia co najwyżej 2. W takim razie, korzystając z poprzedniego faktu, wystarczy sprawdzić czy wielomiany przyjmują takie same wartości dla przynajmniej trzech różnych argumentów. Oczywiście argumenty te mogą być

5.2 Zadania testowe

W zadaniach testowych, należy ustosunkować się do każdego z podpunktów oznaczając go jako **prawdziwy** lub **fałszywy** oraz, w przypadku niektórych zadań, wykonać dodatkowe polecenia. (Możliwe są oczywiście wszystkie kombinacje odpowiedzi. Może się zdarzyć nawet, że wszystkie trzy podpunkty mogą być fałszywe lub prawdziwe.) Każdą swoją odpowiedź spróbuj **uzasadnić**.

Zadanie 23. Wielomian dany wzorem: $W(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + ax + b$ jest podzielny przez wielomian:

- $x - 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ i $b = 0$,
- $x + 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 3$ i $b = 0$,
- $x^2 - 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = -1$ i $b = 0$.

Zadanie 24. Zbiór wartości funkcji $f: \langle 0, 2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = -x^2 + x + 1$ jest:

- zawarty w zbiorze $(-\infty, 1)$,
- równy $\langle -1, 1 \rangle$,
- zawarty w zbiorze $\langle -1.5; 1.5 \rangle$.

Zadanie 25. Do wykresu wielomianu danego wzorem: $W(x) = x^3 - 2x^2 + mx$ należą dwa punkty w których styczne są równoległe do prostej $y = 2x$ dla:

- $m = 3$,
- $m = 4$,
- $m > \frac{10}{3}$.

Wskazówka: Skorzystaj z pochodnej i wzoru na styczną w punkcie.

Zadanie 26. Wielomian $Q(x) = x^3 - mx^2 + 3x - 3$:

- ma dwa ekstremum lokalne gdy $-3 < m < 3$,
- jest funkcją rosnącą gdy $m \in (-3, 3)$,
- nie ma ekstremów lokalnych gdy $m \in (-3, 3)$.

Zadanie 27. Dane są funkcje $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ oraz $g(x) = -x^4 + 2x^2 - 5$.

Czy:

- b) $W(x) = x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 14x - 7$, $a = -1$, $k = 2$,
 c) $W(x) = x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 13x^2 + 14x - 5$, $a = 1$, $k = 3$,
 d) $W(x) = x^5 - 4x^4 + x^3 + 37x^2 + 50x + 19$, $a = -1$, $k = 3$,
 e) $W(x) = x^5 - 6x^4 - 7x^3 + 106x^2 - 228x + 152$, $a = 2$, $k = 3$,
 f) $W(x) = 3x^5 + 18x^4 + 31x^3 - 6x^2 - 60x - 40$, $a = -2$, $k = 3$.
 g) $(\star) W(x) = (x - 1)^{100}$, $k = 1$, $k = 100$, korzystając z różniczkowej charakterystyki krotności pierwiastka wielomianu.
- Zadanie 21.** Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu W przez V , gdy:
- a) $W(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$,
 b) $W(x) = x^{19} + x^{18} + x^{17} + \dots + x^2 + x + 1$,
 c) $W(x) = x^{1995} + x^{1994} + \dots + x^2 + x + 1$, $V(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$,

Zadanie 22. Nie wykonując dzielenia sprawdź czy wielomian W jest podzielny przez V (jeśli nie jest podaj resztę).

- a) $W(x) = x^3 + 5x^2 - 7x + 9$, $V(x) = x - 1$,
 b) $W(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 7x + 11$, $V(x) = x + 1$,
 c) $W(x) = x^6 - 5x^5 + 3x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$, $V(x) = x + 1$,
 d) $W(x) = 6x^3 - 7x^2 + 7x + 6$, $V(x) = 2x + 1$,
 e) $W(x) = 8x^3 + 2x^2 + 13x + 7$, $V(x) = 2x + 1$,
 f) $W(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$, $V(x) = x^2 - 3x + 2$,
 g) $W(x) = x^3 + 20x^2 - x - 20$, $V(x) = x^2 - 1$,
 h) $W(x) = x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 16x + 20$, $V(x) = x^2 + 7x + 10$,
 i) $W(x) = x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 19x + 30$, $V(x) = x^2 - x - 6$.

dowolne, jednak my wybierzemy takie, aby łatwo można było wyliczyć wartości $W(x)$ oraz $G(x)$. Weźmy więc: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_2 = 3$ (wybór jest taki, ze względu na wielomian W , w którym podstawienie 1, 2 lub 3 zeruje niektóre składniki!).

Skoro W i G są równe to oczywiście musi być spełniony układ:

$$\begin{cases} W(1) = G(1) \\ W(2) = G(2) \\ W(3) = G(3) \end{cases}$$

Znany wzory na $W(x)$ i $G(x)$, więc korzystając z nich możemy zapisać (podstawiając odpowiednie wartości):

$$\begin{cases} 2a = 4 \\ -b = 0 \\ 2c = 6 \end{cases}$$

Co daje nam odpowiedź: $a = 2$, $b = 0$, $c = 3$.

4.3 Wielokrotne pierwiastki wielomianu

Definicja 4.7 (k -krotny pierwiastek wielomianu). Liczbę a nazywamy k -krotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, gdy w jego rozkładzie występuje czynnik $(x - a)^k$ i nie występuje czynnik $(x - a)^{k+1}$. Innymi słowy, jeśli a jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to wielomian ten dzieli się przez $(x - a)^k$, ale nie dzieli się przez $(x - a)^{k+1}$.

Fakt 4.8. Liczba a jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:

$$\begin{cases} W(a) = 0 \\ W'(a) = 0 \\ \vdots \\ W^{(k-1)}(a) = 0 \\ W^{(k)}(a) \neq 0 \end{cases}$$

W powyższym zapisie przez $W^{(n)}(x)$ oznaczmy n -tą pochodną² wielomianu $W(x)$.

²Termin n -ta pochodna, oznacza, że daną funkcję różniczkujemy n razy. Czyli liczymy pochodną, potem pochodną z pochodnej itd. n -razy.

Przykład 4.9. Liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 2$. Sprawdźmy ile wynosi krotność tego pierwiastka. Najpierw przekonajmy się, czy rzeczywiście -1 jest pierwiastkiem:

$$W(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 + 2 - 2 = 0.$$

Łatwo policzyć pierwszą pochodną tego wielomianu - ma ona postać: $W'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 2$. Sprawdźmy czy -1 jest również pierwiastkiem pochodnej:

$$W'(x) = 5 - 4 + 3 - 2 - 2 = 0.$$

Policzmy teraz drugą pochodną (czyli pochodną pochodnej): $W''(x) = 20x^3 + 12x^2 + 6x + 2$. Co daje nam:

$$W''(x) = -20 + 12 - 6 + 2 \neq 0.$$

Na mocy faktu dowiedliśmy więc, że liczba -1 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Definicja 4.10. Niech $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Wówczas liczbę a_0 nazywamy wyrazem wolnym, natomiast liczbę równą $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ sumą współczynników wielomianu W .

Fakt 4.11. Dla dowolnego wielomianu $W(x)$ zachodzi:

1. wyraz wolny jest równy $W(0)$,
2. suma współczynników jest równa $W(1)$,
3. wykres wielomianu przecina oś OY w punkcie $(0, a_0)$.

Problem 4.2. Zastanów się, jak można udowodnić powyższy fakt.

Przykład 4.12. Policzmy teraz wyraz wolny i sumę współczynników wielomianu $W(x) = (x - 4)^3(x^2 - 16)$. Oczywiście można by wymnożyć wszystkie składniki tego iloczynu (podnosząc wcześniej $(x - 4)$ do potęgi trzeciej), jednak zajęłoby to dużo czasu. My możemy skorzystać ze znanych nam już twierdzeń i faktów. Po pierwsze jest to wielomian stopnia 5 (czy wiesz dlaczego?). Wyraz wolny, na mocy poprzedniego faktu, równa się wartości $W(0)$. Mamy więc:

$$a_0 = W(0) = 4^3 \cdot 16 = 4^5 = 1024.$$

Suma współczynników $a_5 + a_4 + \dots + a_1 + a_0$, na mocy faktu, równa jest wartości $W(1)$, Stąd mamy:

$$a_5 + a_4 + \dots + a_1 + a_0 = W(1) = (-3)^3 \cdot (-15) = 405.$$

f) $x^3 + 3x^2 + x - 1 \leq 0$.

Zadanie 17. Podaj przykład wielomianu, którego jedynymi pierwiastkami są liczby $-3, 2, 4$ i którego stopień jest równy:

- a) 3,
- b) 4,
- c) 6.

Zadanie 18. Wyznacz wartości parametrów a, b i c , wiedząc, że:

- a) $W(x) = x^3 + ax^2 + 6x + b$, $W(0) = 1$, $W(1) = 5$,
- b) $W(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 - b$, $W(0) = -1$, $W(1) = 8$,
- c) $W(x) = -x^5 + 3x^4 - ax^3 + x + b$, $W(0) = 2$, $W(1) = -4$,
- d) $W(x) = -6x^7 - ax^5 + bx^4 - 3x + 5$, $W(-1) = 2$, $W(1) = -2$,
- e) $W(x) = x^{2004} + x^{2003} + x^{2002} + \dots + x^3 - ax^2 + x + b$, $W(1) = 2007$, $W(0) = 3$,
- f) $W(x) = x^5 + ax^2 + bx + c$, $W(-1) = 1$, $W(0) = 1$, $W(1) = -1$,
- g) $W(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + c$, $W(-2) = -16$, $W(0) = -4$, $W(2) = 0$,
- h) $W(x) = x^4 + \frac{1}{3}x^3 - ax^2 - bx + c$, $W(-1) = 9$, $W(0) = -3$, $W(3) = 6$.
- i) $W(x) = x^{100} - x^{99} + x^{98} - x^{97} + \dots - ax^3 + bx^2 - x + 1$, $W(1) = 3$, $W(-1) = 101$.

Zadanie 19. Określ stopień podanych wielomianów oraz oblicz ich wyrazy wolne i sumy współczynników.

- a) $W(x) = (17x^{117} - x^{115} - 16x^{19} - 1)^{83}(19x^{119} - 18x^{17} - x^7 - 1)^{38}$,
- b) $W(x) = (3x^{11} - 4x^8 + 1)^8(5x^2 + 8x - 1)^{19}$,
- c) $W(x) = (8x^{12} - 13x^7 + 5x^3 + 1)^{95}(8x^{19} - 11x^{17} + 3x^7 + 1)^{59}$,
- d) $W(x) = (8x^{12} - 13x^7 + 5x^3 + 1)^{95} + (8x^{19} - 11x^{17} + 3x^7 + 1)^{59}$,

Zadanie 20. Wykaż, że dana liczba a jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu W .

- a) $W(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$, $a = 1$, $k = 2$,

Zadanie 13. Wielomian $W(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ jest równy wielomianowi $T(x) = (x-2)^2(x-c)$, gdzie $c \neq 2$. Wyznacz wartości współczynników a, b, c . Rozwiąż nierówność $T(x) \leq 0$.

Zadanie 14. Rozwiąż równanie:

- $x^4 + 2x^3 - x - 2 = 0$,
- $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$,
- $x^4 + x^2 - 6x + 4 = 0$,
- $x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 19x - 6 = 0$,
- $2x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$,
- $9x^4 + 9x^3 + 11x^2 + 9x + 2 = 0$,

Zadanie 15. Rozwiąż nierówność:

- $(x-1)(x-2)(x+3) \geq 0$,
- $(x^2+1)(x^2-1)(x-2)^2 < 0$,
- $(x^2-1)^3(x^4+2) > 0$,
- $(x-1)^2(x+3)^3 \geq 0$,
- $(x-4)^2(x^2-16) \leq 0$,
- $x^2(x-3)(x+1) \leq 0$,
- $-x(x-2)^2 \geq 0$,
- $-2(x+1)^2(x-1) \leq 0$.

Zadanie 16. Rozwiąż nierówność:

- $-x^3 - 2x^2 + 6x < 0$,
- $-x^4 + x^3 + 7x^2 \geq 0$,
- $x^3 - x^2 - 7x \leq 0$,
- $2x^3 + x^2 - 8x - 4 > 0$,
- $3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 \leq 0$,

Problem 4.3. Zastanów się jak, dla podanego w powyższym przykładzie wielomianu, wyliczyć sumę współczynników przy parzystych i nieparzystych potęgach (czyli odpowiedzieć na pytanie ile wynosi $a_5 + a_3 + a_1$ oraz $a_4 + a_2 + a_0$). Wskazówka: użyj wartości $W(1)$ oraz $W(-1)$.

Fakt 4.13. *Wielomian zmienia znak tylko w pierwiastkach o nieparzystej krotności. W pierwiastkach krotności parzystej nasz „wężyk” nie przecina osi OX ale jest do niej styczny.*

4.4 Uogólnione wzory Viete'a

Okazuje się, że wzory Viete'a podane w rozdziale o funkcji kwadratowej, da się uogólnić dla wielomianów stopnia wyższego niż 2. W tym podrozdziale ograniczymy się do podania tych wzorów jedynie dla wielomianów stopnia trzeciego, jednak należy mieć świadomość, że podobne wzory można wyprowadzić dla wielomianów stopni wyższych.

Fakt 4.14 (wzory Viete'a dla wielomianów stopnia trzeciego). *Niech $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ będzie wielomianem stopnia 3, oraz niech liczbą x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami tego wielomianu. Wówczas prawdziwe są wzory:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

oraz istnieje postać iloczynowa tego wielomianu: $W(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Przykład 4.15. Wiadomo, że wielomian dany wzorem $W(x) = x^3 + px^2 + qx = 8$ ma jeden pierwiastek podwójny (przez pierwiastek podwójny rozumiemy pierwiastek drugiego stopnia) a drugi jest do niego liczbą przeciwną. Znajdziemy teraz odpowiednie wartości parametrów p i q , dla których powyższy warunek jest prawdziwy.

Z treści warunku wynika, że wielomian W ma trzy pierwiastki: $a, a, -a$, gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą. Korzystając z wzorów Viete'a mamy, że:

$$\begin{cases} a + a + (-a) = -p \\ a \cdot a + a \cdot (-a) + (-a) \cdot a = q \\ a \cdot a \cdot (-a) = -8 \end{cases}$$

Stąd mamy:

$$\begin{cases} a = -p \\ -a^2 = q \\ a^3 = 8 \end{cases}$$

Czyli:

$$\begin{cases} a = 2 \\ p = -2 \\ q = -4 \end{cases}$$

Wobec czego wielomian możemy zapisać w postaci: $W(x) = (x-2)^2(x+2)$.

5 Zadania

5.1 Zadania otwarte

Zadanie 1. Sprawdź czy wielomian jest $W(x) = 8x^3 - 27$ równy wielomianowi:

a) $P(x) = (2x - 3)^3$,

b) $P(x) = 2x(4x^2 - 9) + 9(2x - 3)$.

Zadanie 2. Podany wielomian W rozłóż na czynniki, znajdź wszystkie jego pierwiastki, podaj ich krotności i naskicuj wykres tego wielomianu.

a) $W(x) = 5x^5 - 20x^4$,

b) $W(x) = x^6 - x^4 - x^2 + 1$.

Zadanie 3. Wykonaj dzielenie wielomianów W przez Q i zapisz go w postaci: $W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$:

a) $W(x) = 2x^3 - x^2 - 2x - 3$, $Q(x) = x + 1$,

b) $W(x) = -3x^4 + 5x^3 + x^2 + 10x + 6$, $Q(x) = x^2 + 2$.

Zadanie 4. Nie wykonując dzielenia oblicz resztę z dzielenia $W(x)$ przez $Q(x)$:

a) $W(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $Q(x) = x - 2$,

b) $W(x) = x^{10} - 1$, $Q(x) = -x^2 + x$,

c) $W(x) = (x-2)^6$, $Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

Zadanie 5. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomian $W(x) = 3x^3 + 4x^2 - 13x + 6$ jest równy:

a) $W(x) = ax^3 + 2bx^2 - 13x + 6$,

b) $W(x) = (x+3)(ax^2 - bx + a - b)$.

Zadanie 6. Liczba $-\frac{1}{2}$ jest pierwiastkiem $W(x) = 12x^5 + 8x^4 + 11x^3 + 7x^2 - x - 1$. Oblicz krotność tego pierwiastka. Znajdź pozostałe pierwiastki.

Zadanie 7. Wyznacz p i q tak, aby liczba 1 była dwukrotnym pierwiastkiem równania: $x^3 - 2x^2 + px + q = 0$. Zadanie rozwiąż przy najmniej na dwa sposoby!

Zadanie 8. Zbadaj parzystość wielomianów:

a) $W(x) = 2x^2 - x$,

b) $W(x) = x^3 - 4x^2 + 1$,

c) $f(x) = 4x^4 + 3x^2 - 1$,

d) $f(x) = x^5 - 3x^3 - 7$.

Zadanie 9. Jaki warunek muszą spełniać współczynniki wielomianu trzeciego stopnia: $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, aby był on funkcją nieparzystą? Czy może on być funkcją parzystą?

Zadanie 10 (*). Wyznacz te wartości parametru a , dla których wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 - 4$:

a) jest funkcją rosnącą,

b) posiada dwa ekstremum lokalne,

c) (*) posiada dokładnie dwa miejsca zerowe (wskazówka: możesz użyć wzorów Viete'a dla wielomianów stopnia trzeciego).

Zadanie 11. Dane są wielomiany $Q(x) = x^3 - x^2 + 2$ i $S(x) = -2x^2 - 2x + 4$.

a) Sprawdź, czy liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $Q(x)$.

b) Wielomian $P(x)$ jest sumą wielomianów $Q(x)$ i $S(x)$. Rozłóż wielomian $P(x)$ na czynniki liniowe.

Zadanie 12. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c funkcja:

$$f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$$

ma co najmniej jedno miejsce zerowe.