

Wartość bezwzględna. Funkcja wymierna.

Kurs matematyki w ORATORIUM

autorami materiałów są: dr Barbara Wolnik i Witold Bołt

31 marca 2006

Spis treści

1	Wartość bezwzględna	2
1.1	Własności wartości bezwzględnej.	2
1.2	Równania z wartością bezwzględną.	3
1.3	Nierówności z wartością bezwzględną.	4
1.4	Przekształcenia wykresów funkcji z użyciem wartości bezwzględnej.	6
1.5	Zadania	7
1.5.1	Zadania otwarte	7
1.5.2	Zadania testowe	9
2	Funkcja homograficzna	11
2.1	Wykres funkcji homograficznej	11
2.2	Hiperbole podstawowe	12
2.3	Własności funkcji homograficznej	13
2.4	Zadania	14
3	Funkcja wymierna	15
3.1	Równania wymierne	16
3.2	Nierówności wymierne.	17
3.3	Zadania	18
3.3.1	Zadania otwarte	18
3.3.2	Zadania testowe	20
4	Zadanie domowe i ogłoszenia	22

1 Wartość bezwzględna

Zbiór liczb rzeczywistych (który oznaczamy przez $\mathbb{R}$) można przedstawić graficznie jako zbiór punktów na osi liczbowej (tzn. na prostej „wypożonej” w zwrot, punkt oznaczony jako zero i jednostkę). Każdej liczbie rzeczywistej x odpowiada na takiej osi dokładnie jeden punkt.

Definicja 1.1 (wartość bezwzględna). Wartością bezwzględną liczby x nazywamy odległość punktu odpowiadającego tej liczbie na osi liczbowej, od punktu zero i oznaczamy przez $|x|$.

Przykład 1.2. Jeśli zaznaczymy na osi liczbowej liczbę 4, to łatwo zauważymy, że jej odległość od zera wynosi 4, stąd $|4| = 4$.

Przykład 1.3. Jeśli zaznaczymy na osi liczbowej liczbę -3 , to widzimy, że jej odległość od punktu zero wynosi 3, stąd $|-3| = 3$.

Przykład 1.4. Podobnie możemy pokazać, że na przykład: $|5| = 5$, $|-7| = 7$, $|0| = 0$, $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, $|\frac{-3}{4}| = \frac{3}{4}$ itd.

Widzimy więc, że obliczenie wartości bezwzględnej z liczby rzeczywistej jest bardzo proste. Możemy przedstawić to w formie przepisu:

- jeśli liczba x jest dodatnia lub jeśli jest zerem, to $|x| = x$,
- w przeciwnym wypadku (jeśli liczba x jest ujemna), to $|x| = -x$.

W ten sposób otrzymaliśmy wzór, który często podaje się wręcz jako definicję wartości bezwzględnej:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

1.1 Własności wartości bezwzględnej.

Poniższy fakt zbiera podstawowe własności wartości bezwzględnej.

Fakt 1.5. Dla dowolnych liczb $x, y, z \in \mathbb{R}$ mamy:

1. $|-x| = |x|$,
2. $|x| \geq 0$,
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,

$$4. \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \text{ przy założeniu } y \neq 0,$$

$$5. |x - y| = |y - x|,$$

$$6. |x - y| \leq |x - z| + |z - y|.$$

Uwaga 1.6. Zauważmy, że dla sumy i różnicy na ogół nie są spełnione własności podobne do tych z punktu 3 i 4 powyższego faktu. Na przykład:

$$|(-3) + 4| \neq |-3| + |4|,$$

$$|5 - 10| \neq |5| - |10|.$$

1.2 Równania z wartością bezwzględną.

Definicja 1.7 (równanie podstawowe z wartością bezwzględną). Równaniem podstawowym z wartością bezwzględną będziemy nazywać równanie postaci:

$$|\text{coś}| = a,$$

gdzie a jest konkretną (ustaloną) liczbą rzeczywistą.

Przykład 1.8. Równania o których mówi definicja wyglądają na przykład tak: $|x| = 2$, $|3x - 4| = 8$, $|x^2 - 4x + 1| = 2$, $|3x - x^2| = 0$, $|4x + 1| = -3$ itp.

Prezentowane tu równania, w których występuje wartość bezwzględna, są bardzo proste. Z tego względu nazywamy je podstawowymi. W toku późniejszych rozważań zajmiemy się również przypadkami bardziej skomplikowanymi, gdzie na przykład niewiadoma będzie zarówno wewnątrz wartości bezwzględnej jak i poza nią, lub takie gdzie będzie więcej niewiadomych.

Poniższy fakt umożliwia rozwiązywanie równań podstawowych z wartością bezwzględną.

Fakt 1.9. W zależności od wartości parametru a zachodzi jeden z przypadków.

1. Jeśli $a < 0$, to równanie $|\text{coś}| = a$ nie ma rozwiązania.
2. Jeśli $a = 0$, to równanie $|\text{coś}| = a$ jest tożsame z równaniem: $\text{coś} = a$.
3. Jeśli $a > 0$, to równanie $|\text{coś}| = a$ jest równoważne warunkom: $\text{coś} = a \vee \text{coś} = -a$.

Korzystając z powyższego faktu, rozwiążemy podane w poprzednim przykładzie równania podstawowe. Sprawdź czy rozumiesz skąd wzięły się podane niżej wyniki.

Przykład 1.10. Równanie $|x| = 2$ ma dwa rozwiązania: $x = 2 \vee x = -2$.

Przykład 1.11. Rozwiązanie równanie $|3x - 4| = 8$, sprowadza się do rozwiązania dwóch równań liniowych: $3x - 4 = 8$ oraz $3x - 4 = -8$. Daje to nam odpowiedź: $x = 4 \vee x = -\frac{4}{3}$.

Przykład 1.12. Aby rozwiązać równanie: $|x^2 - 4x + 1| = 2$, musimy rozwiązać dwa równania kwadratowe:

$$x^2 - 4x + 1 = 2 \vee x^2 - 4x + 1 = -2$$

$$x^2 - 4x - 1 = 0 \vee x^2 - 4x + 3 = 0.$$

W rezultacie otrzymujemy cztery możliwe rozwiązania: $x = 2 - \sqrt{5} \vee x = 2 + \sqrt{5} \vee x = 1 \vee x = 3$.

Przykład 1.13. Równanie $|3x - x^2| = 0$ sprowadza się do $3x - x^2 = 0$, co bardzo łatwo daje się rozwiązać, bo jest to równanie tożsame z: $x(3 - x) = 0$. Czyli mamy dwa rozwiązania $x = 0 \vee x = 3$.

Przykład 1.14. Równanie $|4x + 1| = -3$ zgodnie z podanym faktem jest sprzeczne.

1.3 Nierówności z wartością bezwzględną.

Po rozważaniach dotyczących prostych równań z wartością bezwzględną, przyszedł czas na proste nierówności w których występuje wartość bezwzględna.

Definicja 1.15 (nierówność podstawowa z wartością bezwzględną). Pojęciem nierówności podstawowej z wartością bezwzględną, będziemy określać nierówności postaci: $|\text{coś}| > a$, $|\text{coś}| \geq a$, $|\text{coś}| < a$ lub $|\text{coś}| \leq a$. Zakładamy, że a jest dowolną, ustaloną liczbą rzeczywistą.

Przykład 1.16. Rozwiążemy prostą nierówność $|x| > 2$. Jeśli przypomniemy sobie definicję wartości bezwzględnej podaną w tym rozdziale, możemy powiedzieć, że dana nierówność opisuje zbiór takich punktów na osi liczbowej, których odległość od zera jest większa od 2. Aby „zobaczyć” rozwiązanie wystarczy wykonać prosty rysunek (wykonaj go!) i odczytać odpowiedź: $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

Przedstawimy poniżej fakty, które właściwie bazują na rozumowaniu z powyższego przykładu i umożliwiają rozwiązanie wszystkich nierówności podstawowych.

Fakt 1.17. Załóżmy, że a jest dowolną, ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią. Wówczas mamy:

1. Nierówność $|\cos| > a$ jest równoważna warunkom: $\cos > a$ lub $\cos < -a$.
2. Nierówność $|\cos| \geq a$ jest równoważna warunkom: $\cos \geq a$ lub $\cos \leq -a$.
3. Nierówność $|\cos| < a$ jest równoważna warunkom: $-a < \cos < a$.
4. Nierówność $|\cos| \leq a$ jest równoważna warunkom: $-a \leq \cos \leq a$.

Fakt 1.18. Załóżmy, że a jest dowolną, ustaloną liczbą rzeczywistą ujemną. Wówczas mamy:

1. Nierówność $|\cos| > a$ jest równoważna zapisowi: $\cos \in \mathbb{R}$.
2. Nierówność $|\cos| \geq a$ jest równoważna zapisowi: $\cos \in \mathbb{R}$.
3. Nierówność $|\cos| < a$ jest sprzeczna.
4. Nierówność $|\cos| \leq a$ jest sprzeczna.

Fakt 1.19. Załóżmy, że $a = 0$. Wówczas mamy:

1. Nierówność $|\cos| > a$ jest równoważna zapisowi: $\cos \neq 0$.
2. Nierówność $|\cos| \geq a$ jest równoważna zapisowi: $\cos \in \mathbb{R}$.
3. Nierówność $|\cos| < a$ jest sprzeczna.
4. Nierówność $|\cos| \leq a$ jest równoważna zapisowi: $\cos = 0$.

Problem 1.1. Podaj interpretację geometryczną każdego z przypadków powyższych faktów.

Korzystając z podanych faktów, pokażemy teraz jak rozwiązać proste nierówności z wartością bezwzględną.

Przykład 1.20. Rozważmy nierówność: $|4x - 3| > 1$, Jest ona równoważna warunkom:

$$4x - 3 < -1 \vee 4x - 3 > 1.$$

Stąd mamy:

$$x < \frac{1}{2} \vee x > 1.$$

Czyli rozwiązaniem nierówności jest: $x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$.

Przykład 1.21. Rozważmy nierówność: $|3 - x| \leq 2$. Korzystając z podanych wcześniej własności, wiemy że podana nierówność jest równoważna nierówności $|x - 3| \leq 2$. Taka nierówność natomiast jest równoważna dwóm warunkom, które w skrócie zapisujemy:

$$-2 \leq x - 3 \leq 2.$$

Aby otrzymać rozwiązanie wystarczy dodać do wszystkich stron nierówności liczbę 3, co daje nam zapis: $1 \leq x \leq 5$. Stąd mamy odpowiedź: $x \in \langle 1, 5 \rangle$,

1.4 Przekształcenia wykresów funkcji z użyciem wartości bezwzględnej.

Przypuśćmy, że dana jest funkcja $f(x)$ oraz wiemy jak wygląda jej wykres. Zastanówmy się jak będzie wyglądać wykres funkcji g danej wzorem $g(x) = |f(x)|$. Otóż jeśli dla pewnej wartości argumentu x wartość funkcji f jest nieujemna (dodatnia lub równa zero), to nałożenie wartości bezwzględnej niczego nie zmieni. Natomiast jeśli dla pewnej wartości x wartości $f(x)$ jest ujemna, to wówczas wartość $g(x)$ będzie liczbą przeciwną do $f(x)$.

Fakt 1.22 (o wykresie funkcji z nałożoną wartością bezgłdną „na funkcję”). *Aby uzyskać wykres funkcji $y = |f(x)|$ z wykresu funkcji $f(x)$ postępujemy w następujący sposób:*

- Punkty które leżą nad osią OX (lub na niej) pozostawiamy niezmiennione.
- Punkty które leżą pod osią OX odbijamy symetrycznie względem tej osi - czyli mówiąc potocznie odbijamy je do góry.

Ćwiczenie: Narysuj wykresy funkcji $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Następnie korzystając z powyższego faktu narysuj wykres funkcji: $g(x) = |x^2 - 4x + 3|$.

Zastanówmy się teraz jak, mając dany wykres funkcji $f(x)$ narysować wykres funkcji g danej wzorem $g(x) = f(|x|)$. Jeśli argument x jest nieujemny (tzn. $x \geq 0$) to oczywiście $g(x) = f(x)$ czyli wykres (dla $x \geq 0$ czyli po prawej stronie osi OY) pozostawiamy niezmienniony. Ponadto wiemy na pewno, że funkcja $g(x)$ jest funkcją parzystą (bo dla każdego x z dziedziny mamy: $g(-x) = f(|-x|) = f(x) = g(x)$). Zatem lewą stronę wykresu (względem osi OY) stanowi lustrzane odbicie strony prawej.

Fakt 1.23 (o wykresie funkcji z nałożoną wartością bezwzględną „na argument”). *Aby uzyskać wykres funkcji $y = f(|x|)$ należy wyrzucić lewą stronę wykresu $y = f(x)$. Prawą stronę wykresu pozostawiamy bez zmian i odbijamy symetrycznie, tak aby otrzymać wykres funkcji parzystej.*

Ćwiczenie: Narysuj wykresy funkcji $f(x) = 3x - 1$. Następnie korzystając z powyższego faktu narysuj wykres funkcji: $g(x) = f(|x|) = 3|x| - 1$.

Ćwiczenie: Narysuj wykresy funkcji $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Następnie korzystając z powyższego faktu narysuj wykres funkcji: $g(x) = f(|x|) = |x|^2 - 4|x| + 3$.

Uwaga 1.24. Ze względu na to, że $|x|^2 = x^2$, zapisy $h(x) = x^2 - 6|x| + 8$ oraz $h(x) = |x|^2 - 6|x| + 8$ są równoważne. Bez względu na stosowany zapis, postępujemy zgodnie z tym co podano w powyższym fakcie.

Uwaga 1.25. Ponieważ wiemy, że $\sqrt{x^2} = |x|$, zatem funkcja g dana wzorem: $g(x) = \sqrt{[f(x)]^2}$ jest równa funkcji $|f(x)|$.

Przykład 1.26. Zastanówmy się jak narysować wykres funkcji

$$f(x) = \sqrt{x^4 - 4x^2 + 4}.$$

Przekształćmy wyrażenie pod pierwiastkiem: $x^4 - 4x^2 + 4 = (x^2 - 2)^2$. Widać więc, że $\sqrt{x^4 - 4x^2 + 4} = \sqrt{(x^2 - 2)^2} = |x^2 - 2|$. Wystarczy więc naszkicować wykres funkcji $y = x^2 - 2$ i zastosować odpowiedni z faktów podanych wyżej.

1.5 Zadania

1.5.1 Zadania otwarte

Zadanie 1. Rozwiąż równanie:

$$\text{a) } |3x + x^2| = 2, \quad \text{b) } |2x - 4| = 5, \quad \text{c) } |4x^2 + 5x - 7| = -2,$$

Zadanie 2. W zależności od parametru m podaj liczbę rozwiązań równania:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } |2x - 4| = m, & \text{c) } x^2 - 5|x| + 4 = m, & \text{e) } 2|x^2 + 3x - 4| + m = 3, \\ \text{b) } |x^2 - 5x + 4| = m, & \text{d) } 3|x| - 2 = m + 1, & \end{array}$$

Zadanie 3. Rozwiąż podane nierówności:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } |3x + 6| \leq 9, & \text{d) } |x - 4| > 6, & \text{g) } |4x^2 - 4x + 3| < 2, \\ \text{b) } 2|x| < 2, & \text{e) } 2|x| + 2 \geq |x|, & \text{h) } |x^2 + 6x - 1| > 15, \\ \text{c) } |x| - 1 \leq 0, & \text{f) } |x| - 2 \geq 2|x|, & \text{i) } (x - 2)^2 \leq 1. \end{array}$$

Zadanie 4. Wierzchołkiem paraboli $y = x^2 + bx + c$ jest punkt P . Podaj liczbę rozwiązań równania $|x^2 + bx + c| = 3$, jeśli:

- a) $P = (1, -1)$, b) $P = (1, -3)$, c) $P = (1, 3)$, d) $P = (1, 6)$.

Odpowiedź znajdź posługując się interpretacją geometryczną!

Zadanie 5. Narysuj wykres funkcji:

- a) $f(x) = |4x^2 - 3|$, d) $f(x) = 3x^2 - 2|x| - 1$,
b) $f(x) = \sqrt{x^4 - 4x^2 + 4}$,
c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$, e) $f(x) = -2x^2 - |x| + 3$.

Zadanie 6. Rozwiąż równania i nierówności.

- a) $\left| \frac{1}{x+2} \right| = \left| \frac{2}{x-1} \right|$, e) $\left| \frac{x^2+2x-36}{x^2-4} \right| - 1 > 0$,
b) $\frac{4|x|-3}{x} = x$, f) $|x-1| + |x-2| + |x+1| + |x+2| = 6$,
c) $\left| \frac{2x-1}{x+2} \right| < 2$, g) $|x^2 - x| = x - 1$,
d) $\left| \frac{2x-5}{x+3} \right| > 1$, h) $2x^2 + |x| = 1$,
i) $x^4 - 3x^2 - |x^2 - 3| = 0$,

Zadanie 7. Zapisz w postaci jawnej wzory funkcji g i h . Naszkicuj wykresy funkcji f , g i h .

- a) $f(x) = \frac{1-x}{3x+1}$, $g(x) = |f(x)|$, $h(x) = f(|x|)$,
b) $f(x) = \frac{x-5}{x-2}$, $g(x) = |f(x)|$, $h(x) = g(|x|)$,
c) $f(x) = x^2 + 5x + 3$, $g(x) = f(|x|)$, $h(x) = |g(x)|$,
d) $f(x) = \frac{1}{|x|}$, $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$,
e) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $g(x) = 2x + 1$, $h(x) = g(|f(x)|)$.

Zadanie 8. Wyznacz wartość maksymalną, minimalną oraz ekstrema lokalne (jeśli istnieją) funkcji f .

- a) $f(x) = x^2 - 3|x| + 2$,
b) $f(x) = |x^3 - 1|$,
- c) $f(x) = \left| \frac{1-2x}{1+2x} \right| + 3$,
d) $f(x) = \frac{1}{x} + |3x - 3|$.

1.5.2 Zadania testowe

Zadanie 9. Narysuj w układzie współrzędnych figurę F daną wzorami:

$$\begin{cases} |y| \geq 1 \\ y < |x| \end{cases}$$

Odpowiedz na pytania.

- a) Czy figura F ta ma punkty wspólne z figurą daną nierównością $x^2 + y^2 \leq 1$?
Jeśli tak, to podaj współrzędne jednego z nich.
- b) Czy figura F ma środek i/lub oś symetrii? Jeśli tak, to podaj odpowiednie wzory / współrzędne.

Zadanie 10. Zbiór rozwiązań nierówności $|x - \sqrt{2003}| \leq |\sqrt{2003} - x|$ jest:

- a) jednoelementowy,
b) dwuelementowy,
- c) zawierający zbiór $\langle -2003, 2003 \rangle$.

Zadanie 11. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = x^2 - |x| - 2$:

- a) jest nieparzysta,
b) ma jedno maksimum lokalne,
- c) nie ma minimów lokalnych.

Zadanie 12. Funkcja $f(x) = |x + 2|(x - 3)^2 + 1$ posiada:

- a) minimum w punkcie $x = 3$,
b) parzystą liczbę ekstremów,
- c) nieparzystą liczbę maksimów.

Zadanie 13. Dane są zbiory:

$$A = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge |x| > |y|\},$$

$$B = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge |xy| = 1\}.$$

- a) Zbiory A i B są rozłączne (nie mają punktów wspólnych).

- b) Zbiór $A \cup B$ ma co najmniej dwie osie symetrii.
c) Zbiór $A \setminus B$ ma środek symetrii.

Zadanie 14. Równanie $||x - 2| - 2| = m$ (z niewiadomą x):

- a) ma dokładnie dwa rozwiązania dla $m = 4$,
b) ma dokładnie trzy rozwiązania dla pewnego m ,
c) dla $m > 2$ suma rozwiązań wynosi -4 .

Zadanie 15. Nierówność $\frac{1-x}{|x|} \leq 1$ spełniają:

- a) wszystkie liczby dodatnie, c) wszystkie liczby całkowite dodatnie.
b) wszystkie liczby całkowite,

Zadanie 16. Równanie $||x - 2| - 1| = a$ ma trzy różne pierwiastki. Zatem:

- a) $a = -1$,
b) suma tych pierwiastków równa jest 6,
c) pierwiastki te są wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego.

Zadanie 17. Rozwiąż równanie: $|x|^3 - x^2 + |x| - 1 = 0$.

- a) Równanie to ma więcej niż 3 pierwiastki.
b) Suma pierwiastków równa jest 0.
c) Równanie to ma tyle samo pierwiastków dodatnich co ujemnych.

Zadanie 18. Narysuj figury:

$$A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge (y - x)^2 \leq 4\},$$

$$B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge |x| \leq 4\}.$$

Figura $A \cap B$:

- a) jest ograniczona, b) ma oś symetrii, c) ma środek symetrii.

Zadanie 19. Zbiorem rozwiązań nierówności: $\frac{1}{|2-x|} > 1$ jest:

- a) $\mathbb{R} \setminus \langle 1; 3 \rangle$, b) $(1; 3)$, c) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Zadanie 20. Jeśli $A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R} \wedge |xy| = 1\}$ to:

- a) prosta $y = x$ jest osią symetrii zbioru A ,
 b) osie układu współrzędnych są osiami symetrii zbioru A ,
 c) środek układu współrzędnych jest środkiem symetrii zbioru A .

Zadanie 21. Funkcja f określona jest wzorem: $f(x) = \frac{|x|+2}{|x|+1}$.

- a) Pochodna f jest dodatnia dla $x < 0$ i ujemna dla $x > 0$.
 b) Funkcja f ma maksimum lokalne w punkcie $x = 0$.
 c) Wykres funkcji f jest symetryczny względem osi OY .

2 Funkcja homograficzna

Definicja 2.1 (funkcja homograficzna). Funkcją homograficzną nazywamy funkcję postaci:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

gdzie $c \neq 0$ oraz $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

Uwaga 2.2. Zauważmy, że warunek $c \neq 0$ gwarantuje, że powyższa funkcja nie jest funkcją liniową, bo jeśli $c = 0$, to wtedy wzór funkcji przyjął by postać: $f(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$. Drugi warunek gwarantuje natomiast, że proste występujące w liczniku i mianowniku nie są równoległe, a stąd, że wyrażenie $\frac{ax+b}{cx+d}$ jest nieskracalne.

2.1 Wykres funkcji homograficznej

Wykresem każdej funkcji homograficznej jest hiperbola. Składa się ona z dwóch rozłącznych gałęzi „uwiązanych” pomiędzy asymptotami. Każda hiperbola ma dwie osie symetrii oraz punkt symetrii.

Fakt 2.3 (o asymptotach). Funkcja homograficzna $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ma dwie asymptoty:

- pionową, daną równaniem $x = -\frac{d}{c}$,
- poziomą, daną równaniem $y = \frac{a}{c}$.

Algorytm rysowania wykresów funkcji homograficznych. Aby narysować przybliżony wykres funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ należy:

1. wyznaczyć i narysować asymptoty tego wykresu,
2. wyznaczyć przynajmniej jeden punkt tego wykresu (wstawiając za x dowolną liczbę, dla której łatwo wyliczyć wartość $f(x)$, oraz wszystkie punkty symetryczne do tego punktu,
3. naszkicować asymptotę przechodzącą przez otrzymane punkty, pamiętając o asymptotach.

Przykład 2.4. Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ należy:

1. narysować asymptoty $x = 1$ oraz $y = 3$,
2. ponieważ $f(0) = 0$, to zaznaczamy punkt $(0, 0)$ oraz punkty do niego symetryczne, czyli: $(-2, 2)$, $(4, 4)$, $(2, 6)$,
3. rysujemy kolejno każdą z gałęzi pamiętając o dążeniu do asymptot.

Uwaga 2.5. Częstym problemem jest znalezienie punktu symetrycznego do danego. Pomocny może być następujący algorytm. Po pierwsze orientujemy zadany punkt względem punktu przecięcia się asymptot. W powyższym przykładzie punkt $(0, 0)$ leży 1 w lewo, 3 w dół od punktu przecięcia asymptot. Pierwszy punkt otrzymamy przestawiając same liczby, tzn biorąc punkt który jest 3 w lewo i 1 w dół od punktu przecięcia asymptot. Jest to punkt $(-2, 2)$. Następne dwa punkty otrzymamy przez zamianę „w lewo” na „w prawo” (i odwrotnie) oraz „w górę” na „w dół” (i odwrotnie), czyli dokładnie: 1 w prawo, 3 w górę (punkt $(2, 6)$) oraz 3 w prawo i 1 w górę (punkt $(4, 4)$).

2.2 Hiperbole podstawowe

Aby uzyskać dokładniejszy wykres funkcji homograficznej, trzeba nauczyć się najpierw rysować wykresy typu $y = \frac{B}{x}$, gdzie $B \neq 0$.

Asymptotami tych wykresów są osie układu współrzędnych, osiami symetrii proste: $y = x$ oraz $y = -x$, a środkiem symetrii jest punkt $(0, 0)$. Każda z tych funkcji jest nieparzysta.

Przykład 2.6. Narysujmy wykres funkcji $y = \frac{1}{x}$. Wstawiamy za x liczby łatwe do obliczeń i dostajemy na przykład następujące punkty wykresu: $(1, 1)$, $(2, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 2)$. Pozwala to naszkicować prawą gałąź hiperboli. Korzystając z nieparzystości możemy zaznaczyć na wykresie punkty: $(-1, -1)$, $(-2, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -2)$ i rysujemy lewą gałąź.

Przykład 2.7. Narysujmy teraz wykres funkcji $y = \frac{6}{x}$. Tu wygodnie jest podstawiać za x kolejne dzielniki liczby 6, co daje nam następujące punkty: $(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$. Dalej postępujemy tak jak w poprzednim przykładzie.

Przykład 2.8. Teraz narysujmy wykres $y = -\frac{4}{x}$. Za x wstawiamy dzielniki liczby 4: $(1, -4)$, $(2, -2)$, $(4, -1)$. Dalej postępujemy tak jak w poprzednich przykładach.

Uwaga 2.9. Zauważmy, że hiperbola otrzymana w ostatnim z przykładów jest inaczej umiejscowiona w układzie współrzędnych niż dwie poprzednie. Rzeczywiście jeśli $B > 0$ to hiperbola $y = \frac{B}{x}$ leży w I i III ćwiartce, natomiast gdy $B < 0$ to hiperbola ta leży w II i IV ćwiartce układu współrzędnych.

2.3 Własności funkcji homograficznej

Fakt 2.10. Każdą funkcję homograficzną $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ można zapisać w postaci:

$$f(x) = A + \frac{B}{x - C}, \quad \text{gdzie } B \neq 0.$$

Uzasadnienie: Rzeczywiście, wystarczy najpierw podzielić licznik i mianownik przez c , co daje $f(x) = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}}$ a następnie, np. podzielić pisemnie $(\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}) : (x + \frac{d}{c})$. Wtedy $A = \frac{a}{c}$, $C = -\frac{d}{c}$, natomiast B jest resztą z tego dzielenia.

Przykład 2.11. Pokażemy praktyczne zastosowanie powyższego faktu:

- funkcję $f(x) = \frac{4x+3}{x-1}$ można przedstawić również jako $f(x) = 4 + \frac{7}{x-1}$,
- funkcję $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$ można przedstawić również jako $f(x) = 3 + \frac{-2}{x+1}$,
- funkcję $f(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$ można przedstawić również jako $f(x) = \frac{3}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{x-\frac{1}{2}}$.

Przedstawienie funkcji homograficznej w postaci z powyższego faktu okazuje się bardzo pożyteczne, jeśli chcemy wykonać szybko i dość dokładnie wykres funkcji homograficznej. Mianowicie, aby narysować wykres funkcji homograficznej, mając ją w postaci $f(x) = A + \frac{B}{x-C}$, postępujemy w następujący sposób:

1. zaznaczamy asymptoty, które są postaci: $x = C$ oraz $y = A$,

2. traktując asymptoty jako „nowy układ współrzędnych” rysujemy wykres funkcji $y = \frac{B}{x}$, korzystając z metody pokazanej w poprzednim podrozdziale.

Uwaga 2.12. Powyższa metoda jest poprawna, ponieważ rysowanie wykresu $y = \frac{B}{x}$ w „nowym układzie współrzędnych” jest tożsame z przesunięciem funkcji $y = \frac{B}{x}$ o wektor $\vec{u} = [C, A]$.

Fakt 2.13 (własności funkcji homograficznej). *Jeśli $f(x) = A + \frac{B}{x-C}$, gdzie $B \neq 0$, to:*

1. *Dziedziną funkcji f jest zbiór: $\mathbb{R} \setminus \{C\}$, natomiast zbiorem wartości: $\mathbb{R} \setminus \{A\}$.*
2. *Funkcja f nie jest monotoniczna! Jest jedynie przedziałami rosnąca (gdy $B < 0$) lub przedziałami malejąca (gdy $B > 0$).*
3. *Jest to funkcja różnowartościowa, a co za tym idzie ma funkcję odwrotną, daną wzorem $f^{-1}(x) = C + \frac{B}{x-A}$.*

2.4 Zadania

Zadanie 22. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$, b) $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$, c) $f(x) = \frac{2x+8}{x+3}$.

Dla każdej z funkcji podaj dziedzinę, zbiór wartości i omów monotoniczność każdej z tych funkcji.

Zadanie 23. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x) = \frac{3x+4}{x+1}$, c) $f(x) = \frac{4x}{2x-1}$, e) $f(x) = \frac{-2x-1}{x+1}$,
b) $f(x) = \frac{-2x+5}{x-3}$, d) $f(x) = \frac{2}{x+3}$, f) $f(x) = \frac{3x-7}{x-2}$.

Zadanie 24. Naszkicuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$, c) $f(x) = \frac{1}{|x|+2} - 1$, e) $f(x) = \left| \frac{1}{|x|} - 4 \right|$.
b) $f(x) = \left| \frac{1}{x-1} \right|$, d) $f(x) = \left| \frac{1}{x+2} - 1 \right|$,

Zadanie 25. Określ liczbę rozwiązań równania:

$$\left| \frac{4}{|x|} - 2 \right| = m$$

w zależności od m . Narysuj wykres funkcji $y = g(m)$, gdzie $g(m)$ oznacza ilość rozwiązań powyższego równania przy danym m .

Zadanie 26. Wykonaj polecenie z poprzedniego zadania dla równania:

$$-\left|\frac{2}{x} - 1\right| + 1 = m.$$

Zadanie 27. Naszkicuj wykres funkcji:

$$\text{a) } f(x) = \frac{2}{|x|}, \quad \text{b) } f(x) = \frac{3}{|x-4|}, \quad \text{c) } f(x) = \frac{1}{|3-x|} + 1.$$

Zadanie 28. Wykres funkcji f przesunij o wektor $\vec{u}$. Podaj wzór otrzymanej funkcji. Określ jej dziedzinę, zbiór wartości, asymptoty i miejsca zerowe:

$$\text{a) } f(x) = -\frac{1}{x}, \vec{u} = [0, 3], \quad \text{c) } f(x) = -\frac{2}{x}, \vec{u} = [\frac{1}{2}, 0].$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{2}{x}, \vec{u} = [-2, -1],$$

Zadanie 29. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)$, podaj równanie osi symetrii wykresu oraz współrzędne środka symetrii:

$$\text{a) } f(x) = 1 + \frac{4}{x}, \quad \text{c) } f(x) = \frac{4}{x-1} - 3, \quad \text{e) } f(x) = -\frac{1}{x+2} - 2,$$

$$\text{b) } f(x) = -\frac{1}{x+3}, \quad \text{d) } f(x) = \frac{2}{x+3} - 1, \quad \text{f) } f(x) = \frac{2}{-x+4} + 2.$$

3 Funkcja wymierna

Definicja 3.1. Funkcją wymierną nazywamy funkcje postaci:

$$f(x) = \frac{W(x)}{P(x)},$$

gdzie $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami i $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym.

Fakt 3.2. Dziedziną naturalną funkcji $f(x) = \frac{W(x)}{P(x)}$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których $P(x) \neq 0$.

Uwaga 3.3. Przypomnijmy, że dwie funkcje są równe, gdy mają te same dziedziny i wzór jednej z nich możemy sprowadzić do wzoru drugiej.

Przykład 3.4. Funkcja $f(x) = \frac{x(x-2)}{x-2}$ nie jest równa funkcji $g(x) = x$, bo ich dziedziny nie są takie same. Możemy natomiast napisać, że $f = h$, gdzie $h(x) = x$, dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Wniosek: Pamiętaj - zanim zaczniesz upraszczać (lub przekształcać) wzór jakiegokolwiek funkcji, ustal jaka jest jej dziedzina!

3.1 Równania wymierne

Aby szybko i sprawnie rozwiązać równanie wymierne (czyli takie, w której przynajmniej po jednej stronie równości znajduje się funkcja wymierna), można skorzystać z poniższego algorytmu. Tak podany algorytm gwarantuje znalezienie rozwiązania każdego równania wymiernego, przy założeniu, że umiemy rozwiązywać równania wielomianowe odpowiedniego stopnia.

Algorytm rozwiązywania równań wymiernych.

1. Wypisujemy założenia i w razie potrzeby rozwiązujemy je. (Mogą tu pojawić się nierówności, bądź wykluczenia pewnych podzbiorów z dziedziny. Czasem wynika to z treści zadania, a czasem z samego równania.)
2. Mianowniki występujących ułamków (jeśli jest ich kilka) rozkładamy na czynniki tak aby łatwo było określić najmniejszy wspólny mianownik.
3. Mnożymy obie strony równania przez najmniejszy wspólny mianownik, tak aby otrzymać równanie wielomianowe.
4. Rozwiązujemy równanie wielomianowe.
5. Uwzględniając założenia i warunki z punktu 1, podajemy rozwiązanie.

Przykład 3.5. Rozwiążemy równanie:

$$\frac{6-3x}{x^2+x-2} = \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x+2}.$$

Będziemy postępować zgodnie z podanym wyżej algorytmem:

1. Założenia: $x^2 + x - 2 \neq 0, x - 1 \neq 0, x + 2 \neq 0$. Z warunków tych dostajemy: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

2.

$$\frac{6-3x}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x+2}.$$

3. Mnożymy obustronnie przez $(x-1)(x+2)$ i dostajemy:

$$6-3x = x+2 - x(x-1).$$

4. Porządkujemy równanie do postaci: $x^2 - 5x + 4 = 0$ i rozwiązujemy. Otrzymujemy dwa pierwiastki rzeczywiste: $x_1 = 1 \vee x_2 = 4$.
5. Biorąc pod uwagę założenia z punktu 1, okazuje się że tylko $x = 4$ jest rozwiązaniem danego równania wymiernego.

W ten sposób otrzymaliśmy odpowiedź: $x = 4$.

3.2 Nierówności wymierne.

Podobnie jak w przypadku równań, pokażemy prosty i skuteczny algorytm, który pozwala rozwiązywać nierówności wymierne. Tak jak poprzednio idea algorytmu opiera się na sprowadzeniu danej nierówności wymiernej do odpowiedniej nierówności wielomianowej.

Algorytm rozwiązywania nierówności wymiernych.

1. Wypisujemy założenia i rozwiązujemy je.
2. Wszystkie składniki przenosimy na jedną ze stron nierówności i rozkładamy mianowniki występujących ułamków na czynniki (o ile się da), tak aby można było określić najmniejszy (względem stopnia) wspólny mianownik.
3. Sprowadzamy całe wyrażenie do wspólnego mianownika.
4. Licznik rozkładamy na czynniki (o ile jest to możliwe).
5. Stosując przekształcenie tożsamościowe, zastępujemy ułamek występujący z jednej strony nierówności, na wyrażenie będące iloczynem licznika i mianownika. Otrzymujemy w ten sposób nierówność wielomianową.
6. Rozwiązujemy nierówność wielomianową.
7. Uwzględniamy założenia i podajemy odpowiedź.

Przykład 3.6. Rozwiążemy nierówność:

$$\frac{12x - 4}{x^2 - 2x - 3} \leq \frac{3x}{x - 3} - \frac{x^2}{x + 1}.$$

Będziemy postępować zgodnie z podanym algorytmem.

1. Założenia: $x^2 - 2x - 3 \neq 0$, $x - 3 \neq 0$, $x + 1 \neq 0$. Czyli: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.

2. Przenosimy wszystko na lewą stronę:

$$\frac{12x - 4}{(x + 1)(x - 3)} - \frac{3x}{x - 3} + \frac{x^2}{x + 1} \leq 0.$$

3. Sprowadzamy wyrażenie do wspólnego mianownika:

$$\frac{12x - 4 - 3x(x + 1) + x^2(x - 3)}{(x - 3)(x + 1)} \leq 0.$$

4. Rozkładamy licznik na czynniki:

$$\frac{(x - 1)^2(x - 4)}{(x + 1)(x - 3)} \leq 0.$$

5. Mnożymy obie strony przez kwadrat mianownika, czyli innymi słowy, zastępujemy ułamek iloczynem licznika i mianownika:

$$(x - 1)^2(x - 4)(x + 1)(x - 3) \leq 0.$$

6. Rozwiązujemy równanie wielomianowe (jak widać nie wymaga to żadnych dodatkowych przekształceń!). Otrzymujemy odpowiedź:

$$x \in (-\infty, -1) \cup \{1\} \cup (3, 4).$$

7. Uwzględniamy założenia:

$$x \in (-\infty, -1) \cup \{1\} \cup (3, 4).$$

3.3 Zadania

3.3.1 Zadania otwarte

Zadanie 30. Określ dziedzinę funkcji:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}, \quad \text{b) } f(x) = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)}, \quad \text{c) } f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 1}{x^2 + 3x + 6}.$$

Zadanie 31. Sprawdź czy funkcje f i g są równe.

a) $f(x) = \frac{2x+2}{x+1}, g(x) = 2,$

c) $f(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)^2}, g(x) = \frac{x-1}{x+1}.$

b) $f(x) = \frac{x^2(x-1)}{x(x-1)}, g(x) = x,$

Zadanie 32. Pamiętając o dziedzinie, uprość wzory podanych funkcji.

a) $f(x) = \frac{(x+4)^2}{x^2+5x+4},$

d) $f(x) = \frac{2-x}{x^2+x-2} + \frac{x}{x^2-x-6},$

b) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-2x+1},$

c) $f(x) = \frac{x^4-5x^3+6x^2}{x^3-6x^2+8x},$

e) $f(x) = \frac{4x}{x^2-7x+12} + \frac{5x}{x^2-8x+15}.$

Zadanie 33. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1} = 0,$

d) $\frac{3}{x+2} + \frac{12}{x^2-4} + \frac{1}{2x} = 0,$

b) $\frac{(4x-1)(x+1)(2x+1)}{4x^2-1} = 0,$

e) $\frac{x+5}{x+4} + \frac{5}{x-2} = \frac{1}{x+4},$

c) $\frac{2x+1}{x^2-9} - \frac{3}{x-3} = 0,$

f) $\frac{x^2-x}{x^2+x-2} + \frac{x^2+3x+2}{x^2-x-2} = 1.$

Zadanie 34. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{6-x}{x^2-x} > \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x},$

d) $1 + \frac{2}{x-5} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{-x-7}{x^2-4x-5},$

b) $\frac{3x^2+5x+1}{x} \leq 1 - x,$

c) $\frac{(x+3)(x^2-5x+6)}{(x^2-9)(x-3)} \geq 0,$

e) $\frac{1}{x^2+2x-3} \geq \frac{1}{2x+1}.$

Zadanie 35. Podaj dziedzinę funkcji f i przedstaw jej wzór w możliwie prostej postaci.

a) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3},$

d) $f(x) = \frac{x^3-27}{x-3},$

g) $f(x) = \frac{x^4+x^2+1}{x^3+1},$

b) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2},$

e) $f(x) = \frac{x^3-6x^2+12x-8}{6x^2-24x+24},$

h) $f(x) = \frac{x^4+64}{x^2+4x+8},$

c) $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2+x-2},$

f) $f(x) = \frac{x^4-10x^2+9}{x^2-2x-3}$

i) $f(x) = \frac{8x^3+12x^2+6x+1}{4x^2+4x+1},$

Zadanie 36. Rozwiąż równanie (pamiętaj o dziedzinie).

a) $\frac{2x-3}{x-1} + 1 = \frac{6x-x^2-6}{x-1},$

c) $\frac{3}{x^3+8} - \frac{1}{x^2-4} = \frac{2}{x^2-2x+4},$

b) $\frac{2}{x^2+x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{6x},$

d) $\frac{2x-2}{x^2-36} - \frac{x-2}{x^2-6x} = \frac{x-1}{x^2+6x}.$

Zadanie 37. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x^2+x+2}{x^2-x-2} > 0,$

e) $\frac{1+x}{1+2x} - \frac{1-2x}{2(x+1)} < -1,$

b) $\frac{x^2-4}{x^2-5x} > 0,$

f) $\frac{x^2-8x+6}{x^2+2} < \frac{-9}{11},$

c) $\frac{2x^2-7x-29}{x^2-2x-15} > 1,$

g) $\frac{x^5-2x^3-x^2+2}{2x^2-1} > 0,$

d) $\frac{x^2-8x+6}{x^2+2} - 5 < 0,$

h) $\frac{-x^4-x^2+10x}{x^2-1} > 0.$

3.3.2 Zadania testowe

Zadanie 38. Dana jest funkcja $f(x) = 2x + \frac{1}{x+1} + 3$ dla $x \neq -1$.

a) Prosta $y = 2$ jest asymptotą poziomą f .

b) Prosta $x = -1$ jest asymptotą pionową f .

c) Funkcja ta nie ma asymptoty pionowej.

Zadanie 39. Styczna do wykresu $f(x) = \frac{x+1}{x}$ w punkcie $(1, 2)$:

a) przechodzi przez punkt $(2003, -2003)$,

b) ma ujemny współczynnik kierunkowy,

c) jest równoległa do prostej $x + y = 0$.

Zadanie 40. Zbiorem rozwiązań nierówności: $\frac{(x+1)(x-2)^5}{(x-1)|x+1||x+2|} \leq 0$ jest:

a) $(-\infty, -1) \cup (1, 2) \setminus \{-2\},$

c) $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (1, 2).$

b) $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \setminus \langle -1, 1 \rangle,$

Zadanie 41. Funkcja $f: (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

a) ma dodatnią pochodną w każdym punkcie,

c) jest ciągła.

b) jest rosnąca,

Zadanie 42. Funkcja $g(x) = \frac{3x}{2x^2+1}$:

a) posiada ekstrema lokalne,

- b) posiada asymptotę,
- c) ma pochodną równą $f'(x) = \frac{3}{4x}$.

Zadanie 43. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2}{x^2+x+1}$. Jej pochodna:

- a) jest równa $f'(x) = \frac{2x}{2x+1}$,
- b) ma jedno miejsce zerowe,
- c) jest ujemna dla $x \in (-2, 0)$.

Zadanie 44. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2x^2-3x-2}{x^2-3x+2}$. Wykres tej funkcji ma:

- a) jedną asymptotę pionową,
- b) dwie asymptoty pionowe,
- c) asymptotę poziomą $y = 2$.

Zadanie 45. Funkcja g określona wzorem $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$:

- a) jest funkcją malejącą w przedziale $(1, \infty)$,
- b) ma minimum lokalne w punkcie $x = 0$,
- c) nie ma ekstremów lokalny.

Zadanie 46. Zbadaj własności funkcji: $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$. W szczególności sprawdź czy funkcja f ma asymptoty, jaka jest jej monotoniczność, parzystość, ciągłość, oraz jak zachowuje się dla $x \rightarrow \pm\infty$.

Zadanie 47. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{5x+8}{x+1}$ dla $x \neq -1$.

- a) Funkcja f jest równa funkcji $g(x) = \frac{3}{x+1} + 5$ dla $x \neq -1$.
- b) Funkcja f ma asymptotę pionową $x = -1$.
- c) Równanie $f(x) = 5$ nie ma rozwiązania.

Zadanie 48. Wiadomo, że $x + \frac{1}{x} = 4$. Zatem:

- a) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 8$,
- b) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$,
- c) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 16$.

Zadanie 49. Funkcja f dana jest wzorem: $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Wówczas:

a) $f(f(x)) = \frac{1}{(x-1)^2}$, b) $f(f(x)) = f(1/x)$, c) $f(1/x) = \frac{x}{x-1}$.

Zadanie 50. Funkcja $y = \frac{x^2}{x-1}$ jest:

a) malejąca w $(0, 2)$, b) rosnąca w $(2, \infty)$, c) rosnąca w $(-\infty, 0)$.

Zadanie 51. Wykres funkcji $f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{x^2-1}$:

a) jest symetryczny względem punktu $(-1, 1)$,

b) ma dwie asymptoty pionowe,

c) ma asymptotę poziomą.

4 Zadanie domowe i ogłoszenia

- W ramach zadania domowego proszę rozwiązać przynajmniej 22 (słownie **dwadzieścia dwa**) zadania. Rozwiązania proszę przygotować na kartkach podpisanych imieniem i nazwiskiem. Proszę pamiętać, szczególnie w zadaniach testowych, o uzasadnianiu swoich odpowiedzi. Jeśli uda się znaleźć jakieś zadanie które wydaje się zupełnie *nierozwiązywalne* – proszę zapisać je na kartce i oznaczyć jakoś, to na pewno zostanie wyjaśnione!
- W następny weekend 7-8-9 kwietnia odbywają się rekolekcje akademickie, dla studentów, młodzieży pracującej oraz ... **maturzystów**. Zapraszam! Wszelkie szczegóły mogę podać osobiście: e-mail: ja@houp.info, gsm: 660 316 053.
- Wszystkie materiały z naszych zajęć zawsze można znaleźć w internecie: <http://www.salezjanie.rumia.pl/math>. Kto szuka ten znajdzie.)