

Zajęcia nr. 2

Kurs matematyki w ORATORIUM
autorami materiałów są: dr Barbara Wolnik i Witold Bołt

3 marca 2006

Spis treści

1	Funkcja liniowa	3
1.1	Pojęcia podstawowe	3
1.2	Wykres funkcji liniowej	3
1.3	Współczynnik kierunkowy	5
1.4	Zadania	7
2	Równania liniowe	10
2.1	Podstawowe pojęcia	10
2.2	Liczba rozwiązań równania liniowego.	11
2.3	Równania liniowe z założeniami	11
2.4	Zadania	12
3	Układy równań liniowych	13
3.1	Metody rozwiązywania układów równań	13
3.2	Metoda wyznaczników	14
3.3	Zadania	17
3.4	Układy trzech (i więcej) równań liniowych	19
3.5	Zadania dodatkowe	20
4	Funkcja kwadratowa	21
4.1	Podstawowe definicje.	21
4.2	Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej.	22
4.3	Wzory Viete'a.	22
4.4	Funkcja kwadratowa w różnej postaci.	23
4.5	Własności funkcji kwadratowej.	24
4.6	Funkcja kwadratowa określona na przedziale domkniętym.	24
4.7	Zadania	25
5	Równania i nierówności kwadratowe	27
5.1	Równanie kwadratowe.	27
5.1.1	Liczba rozwiązań równania kwadratowego.	28
5.2	Nierówność kwadratowa.	28
5.2.1	Graficzne przedstawienie nierówności kwadratowej.	28
5.3	Zadania	30
5.4	Typowe zadania	31
5.5	Zadania dodatkowe	34
6	Zadanie domowe	35

1 Funkcja liniowa

1.1 Pojęcia podstawowe

Definicja 1.1 (funkcja liniowa). Niech a i b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem: $f(x) = ax + b$ nazywamy liniową.

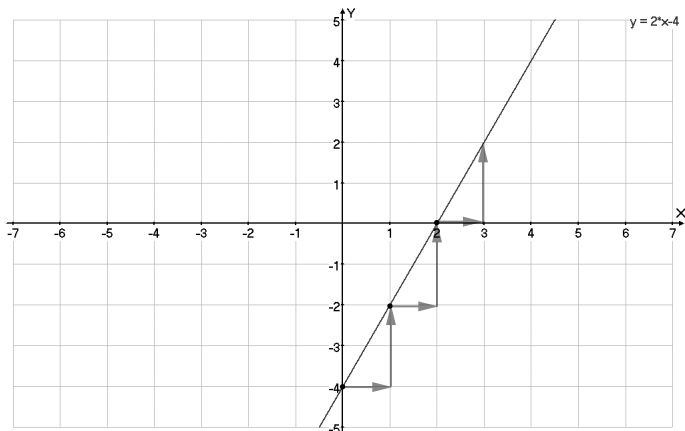
Uwaga 1.2. W definicji funkcji liniowej ważne jest to, że dziedziną tej funkcji jest cały zbiór liczb rzeczywistych (zwróć uwagę na zapis $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, czy wiesz co on oznacza?). Na przykład funkcja dana wzorem: $f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x-1}$ daje się sprowadzić do wzoru funkcji liniowej $f(x) = x + 2$. Nie jest to jednak funkcja liniowa gdyż jej dziedziną jest $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1.2 Wykres funkcji liniowej

Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest linia prosta o równaniu $y = ax + b$. Aby narysować wykres funkcji $f(x) = ax + b$ wystarczy znaleźć co najmniej dwa dowolne punkty tego wykresu.

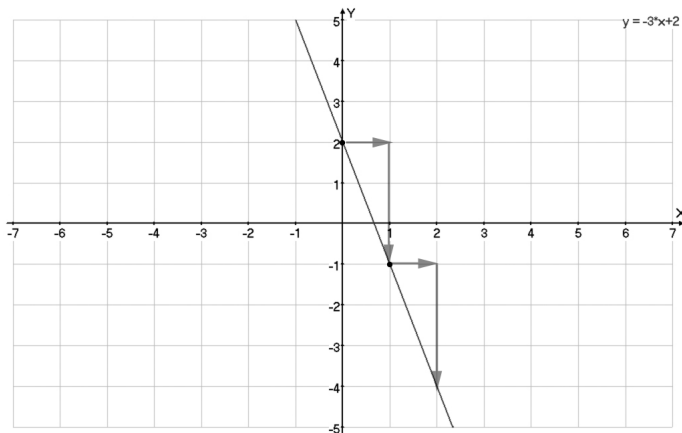
Innym sposobem rysowania wykresu zadanej funkcji liniowej jest tzw. „szybki wykres” stosowany szczególnie wtedy, gdy parametry a i b są całkowite. Wystarczy zdać sobie sprawę, że parametr b określa, w którym miejscu wykres przecina oś OY (bo $f(0) = b$), natomiast parametr a mówi nam o ile wzrasta (lub maleje) wartość funkcji, gdy argument x zwiększamy o 1.

Przykład 1.3 (szybki wykres). Aby zatem narysować wykres funkcji $f(x) = 2x - 4$ zaznaczamy na osi OY punkt -4 (bo $b = -4$). Od narysowanego punktu idziemy jedną kratkę w prawo i dwie kratki do góry (bo $a = 2$) i zaznaczamy kolejny punkt. Od zaznaczonego punktu znów poruszamy się o jedną kratkę w prawo i dwie do góry i otrzymujemy kolejne punkty.



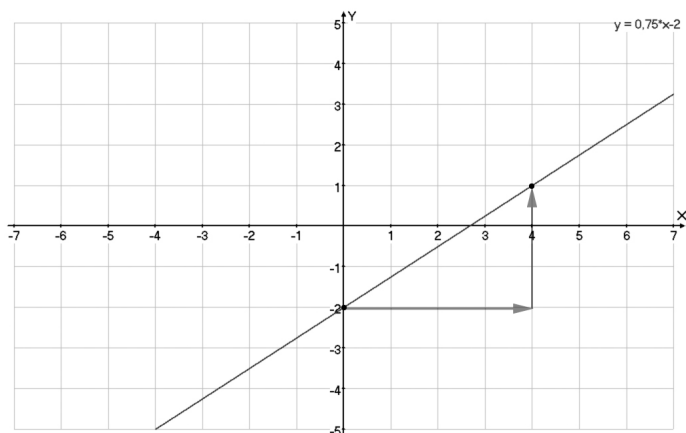
Łącząc otrzymane punkty otrzymujemy prostą która jest wykresem naszej funkcji f .

Przykład 1.4 (szybki wykres). Jeśli parametr a jest ujemny, to wraz ze wzrostem argumentu x , wartość funkcji będzie malała. Zatem rysując wykres np. $f(x) = -3x + 2$ zaznaczamy na osi OY punkt 2 (bo $b = 2$) i poruszamy się o jedną kratkę w prawo i o trzy kratki w dół (bo $a = -3$) otrzymując nowy punkt. Powtarzając procedurę otrzymujemy kolejne punkty:



Uwaga 1.5. Zauważ, że używając metody szybkiego wykresu otrzymujemy dokładniejszy rysunek, gdyż dostajemy wiele punktów, co nie pozwala na „rozchwianie” się rysowanej prostej.

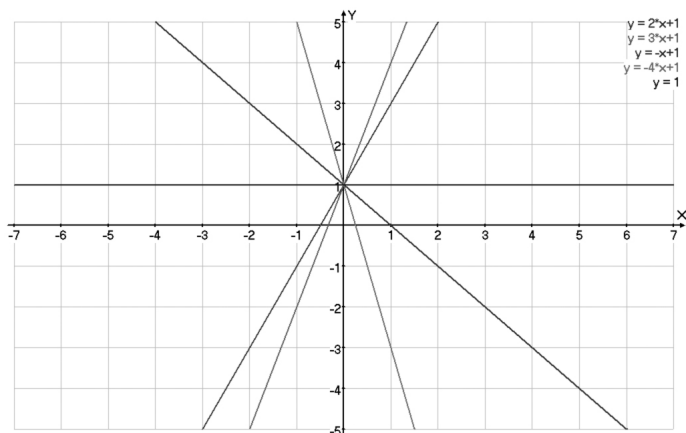
Problem 1.1. Zauważmy, że jeśli paramter a nie jest liczbą całkowitą, to szkicowanie wykresu metodą „szybkiego wykresu” nie jest już takie proste. Na przykład jeśli $f(x) = \frac{3}{4}x - 2$, to na osi OY zaznaczamy -2 , a następnie powinniśmy przenieść się o jedną kratkę w prawo i $\frac{3}{4}$ kratki w górę. Jest to dość trudne do wykonania chyba, że ... zauważmy, iż otrzymamy tą samą prostą poruszając się 4 kratki w prawo i 3 kratki do góry:



1.3 Współczynnik kierunkowy

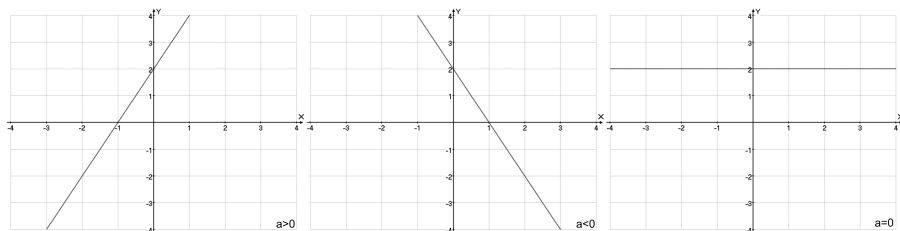
Definicja 1.6 (współczynnik kierunkowy). Parametr a we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ nosi nazwę współczynnika kierunkowego.

Po wcześniejszych rozważaniach dotyczących szkicowania wykresów funkcji liniowych nazwa ta nikogo nie dziwi. Rzeczywiście, to parametr a decyduje o tym, czy wykres opada czy wznosi się i czy jest bardziej stromy czy raczej niewiele odbiega od prostej poziomej. Jeśli w jednym układzie współrzędnych umieścimy wykresy funkcji: $f_1(x) = 2x + 1$, $f_2(x) = 3x + 1$, $f_3(x) = -x + 1$, $f_4(x) = -4x + 1$, $f_5(x) = 1$, to zobaczymy, że choć wszystkie przechodzą przez punkt $(0, 1)$, to jednak „rozbiegają się” w różnych kierunkach.



Fakt 1.7 (monotoniczność funkcji liniowej). Każda funkcja liniowa jest monotoniczna, a rodzaj jej monotoniczności zależy od jej współczynnika kierun-

kowego.

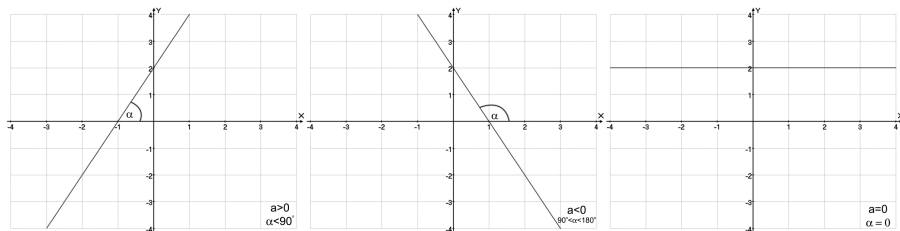


Fakt 1.8. Jeśli współczynnik kierunkowy funkcji liniowej f jest różny od zera (tzn. $a \neq 0$) to funkcja ta jest różnowartościowa, posiada funkcję odwrotną (która jest funkcją liniową), jej zbiorem wartości jest cały zbiór liczb rzeczywistych i ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

Fakt 1.9. Jeśli współczynnik kierunkowy funkcji liniowej jest równy zero, tzn. $f(x) = b$, to funkcja ta nie jest różnowartościowa, nie ma funkcji odwrotnej, jej zbiór wartości jest postaci $\{b\}$, a wykresem jest prosta pozioma (równoległa do osi OX). Jeśli więc $b \neq 0$, to funkcja nie posiada miejsc zerowych, a jeśli $b = 0$, to funkcja ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Wniosek. Z podanych wyżej faktów wynika, że funkcja liniowa może mieć jedno miejsce zerowe (gdy $a \neq 0$), może nie mieć miejsca zerowego (gdy $a = 0$ oraz $b \neq 0$) lub może mieć nieskończenie wiele miejsc zerowych (gdy $a = b = 0$).

Fakt 1.10 (kąt nachylenia prostej). Współczynnik kierunkowy funkcji liniowej f jest równy tangensowi kąta nachylenia wykresu tej funkcji do osi OX (dokładniej mówiąc, do prawej strony tej osi).

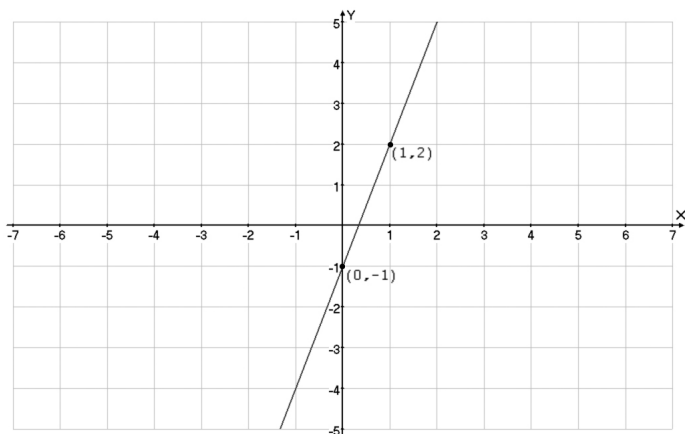


Fakt 1.11 (proste równoległe). Dwie proste o równaniach $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$.

Fakt 1.12 (proste prostopadłe). Dwie proste o równaniach $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Wykresem każdej funkcji liniowej jest linia prosta. Jednak nie każda linia prosta jest wykresem funkcji liniowej. W szczególności wszystkie proste o równaniach $x = c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$, nie są wykresami funkcji. Każda z pozostałych prostych jest wykresem jakiejś funkcji liniowej.

Przykład 1.13. Znajdziemy teraz wzór funkcji, której wykres jest prostą przedstawioną na rysunku:



Ponieważ wykresem jest linia prosta, która nie jest pionowa, zatem szukana funkcja jest liniowa i ma postać $f(x) = ax - 1$ (skąd wiadomo, że $b = -1$?). Ponieważ wykres przechodzi przez punkt $(1, 2)$, zatem $f(1) = 2$, czyli $a - 1 = 2$, co daje $a = 3$. Ostatecznie szukana postać funkcji to $f(x) = 3x - 1$.

1.4 Zadania

Zadanie 1. Która z podanych funkcji jest funkcją liniową?

- a) $f(x) = 3 - 4x$,
- b) $f(x) = \frac{(x^2+1)(x-2)}{x^2+1}$,
- c) $f(x) = g(\frac{1}{x})$, gdzie $g(x) = \frac{1}{x}$,
- d) $f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2+x-2}$.

Zadanie 2 (★). Podaj algorytm „szybkiego rysowania” wykresów funkcji postaci $f(x) = \frac{n}{k}x + b$, gdzie n, k, b są liczbami całkowitymi.

Zadanie 3 (*). Dlaczego proste o równaniach $x = c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ nie są wykresami funkcji?

Zadanie 4. Znajdź wzór funkcji odwrotnej do podanej i obie funkcje narysuj na jednym wykresie.

- a) $f(x) = 3x - 1$,
- b) $f(x) = -2x + 1$,
- c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$,
- d) $f(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$.

Zadanie 5. Narysuj wykresy funkcji:

- a) $f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x-2}$,
- b) $f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x+1}$,
- c) $f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$, gdzie $g(x) = \frac{1}{x}$,
- d) $f(x) = 2x + 1$, dla $x \geq 0$.

Zadanie 6. Jeśli funkcja f jest dana wzorem funkcji liniowej, ale jej dziedziną nie jest cały zbiór liczb rzeczywistych, to co można powiedzieć o jej wykresie?

Zadanie 7. Przez które z ćwiartek układu współrzędnych przechodzi wykres funkcji $f(x) = ax + 1$, gdzie $a \in \mathbb{R}$? Czy zależy to od parametru a ?

Zadanie 8. Przez które z ćwiartek układu współrzędnych przechodzi wykres funkcji $f(x) = 2x + b$, gdzie $b \in \mathbb{R}$? Czy zależy to od parametru b ?

Zadanie 9 (*). W zależności od parametrow wartości współczynnika kierunkowego i wyrazu wolnego omów:

- a) monotoniczność,
- b) parzystość,
- c) różnowartościowość,
- d) postać zbioru wartości,

funkcji liniowej.

Zadanie 10. Ile miejsc zerowych może mieć funkcja liniowa? Podaj przykład na każdą z możliwości. Jak myślisz jaki będzie to miało wpływ na liczbę rozwiązań równania liniowego.

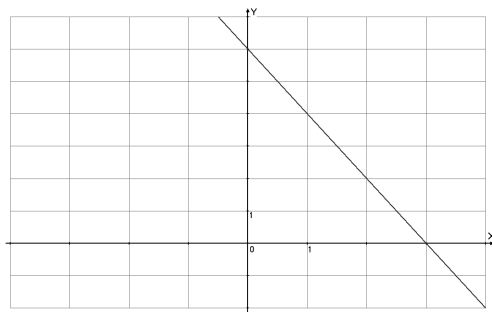
Zadanie 11. Używając tablic matematycznych, kalkulatora albo komputera, podaj dokładną (lub przybliżoną) wartość kąta nachylenia podanych prostych do osi OX :

- a) $f(x) = 2x + 1$,
- b) $f(x) = -x + 3$,
- c) $f(x) = x - 2$,
- d) $f(x) = -3x - 2$,
- e) $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$,
- f) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$.

Zadanie 12. Wyznacz wzór funkcji liniowej której wykres:

- a) przechodzi przez punkty: $A = (1, -1)$, $B = (5, 4)$,
- b) przechodzi przez punkt: $A = (1, 1)$ i jest równoległy do wykresu funkcji $f(x) = 3x - 10$,
- c) przechodzi przez punkt: $A = (2, 1)$ i jest prostopadały do wykresu funkcji $f(x) = 2x - 4$.

Zadanie 13. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej.



- a) Wyznacz wzór tej funkcji.
- b) Sprawdź czy dla argumentu $x = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ wartość funkcji jest równa $4 - 2\sqrt{2}$.

Zadanie 14. Funkcja liniowa jest określona wzorem $f(x) = (2m + 1)x - 1$. Dla jakich wartości parametru m :

- a) funkcja f jest malejąca,
- b) wykres funkcji f jest nachylony do osi OX pod kątem 45° ,
- c) funkcja przyjmuje wartości dodatnie tylko dla argumentów $x > 2$.

Zadanie 15. Funkcja liniowa jest określona wzorem $f(x) = (-m + 2)x - 3m$. Dla jakich wartości parametru m :

- a) funkcja f jest rosnąca,
- b) wykres funkcji f jest nachylony do osi OX pod kątem 135° ,
- c) funkcja f przyjmuje wartości ujemne tylko dla argumentów $x > 1$,
- d) funkcja f jest nieparzysta,
- e) funkcja f nie posiada funkcji odwrotnej,
- f) wykres funkcji f jest prostopadły do wykresu funkcji $g(x) = x + 5$,
- g) wykres funkcji f jest równoległy do wykresu funkcji $g(x) = 4x - 4$.
- h) wykres funkcji f przechodzi przez punkt: $A = (3, 6)$.

2 Równania liniowe

2.1 Podstawowe pojęcia

Definicja 2.1 (równanie liniowe). Równaniem liniowym będziemy nazywać równanie postaci: $ax = b$, gdzie x oznacza niewiadomą, natomiast a i b to parametry.

Rozwiązać powyższe równanie oznacza znaleźć wszystkie liczby, które podstawione w miejsce x spełniają równość. Jeśli nie zaznaczono tego inaczej, przyjmujemy, że x może być dowolną liczbą rzeczywistą.

Przeanalizuj poniższe przykłady i sprawdź czy rozumiesz skąd wzięły się takie, a nie inne wyniki.

Przykład 2.2. Rozwiązaniem równania $2x = 0$ jest dokładnie jedna liczba: 0.

Przykład 2.3. Rozwiązaniem równania $0x = 0$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych (mówimy też, że pierwiastkiem tego równania jest dowolna liczba rzeczywista).

Przykład 2.4. Rozwiązaniem równania $0x = 3$ jest zbiór pusty, co oznacza, że żadna liczba rzeczywista nie jest pierwiastkiem tego równania.

2.2 Liczba rozwiązań równania liniowego.

Fakt 2.5. *Ogólnie, rozwiązując równanie liniowe $ax = b$ otrzymujemy:*

1. jedno rozwiązanie postaci $x = -\frac{b}{a}$, jeśli $a \neq 0$,
2. nieskończenie wiele rozwiązań (czyli $x \in \mathbb{R}$), jeśli $a = 0$ i jednocześnie $b = 0$,
3. zbiór pusty - brak rozwiązań ($x \in \emptyset$), jeśli $a = 0$ i $b \neq 0$.

Wniosek: Równanie liniowe może mieć 0, 1 lub ∞ rozwiązań.

2.3 Równania liniowe z założeniami

W równaniach liniowych, o których pisaliśmy dotychczas, zakładano (choć nie było to nigdzie wyraźnie napisane), że x może być dowolną liczbą rzeczywistą (jest to podobnie jak w przypadku funkcji - dziedzina naturalna). Może się jednak zdarzyć, że równanie będzie miało dziedzinę zadaną z góry. Poniższa definicja jest właściwie rozszerzeniem poprzedniej.

Definicja 2.6 (równanie liniowe z założeniami). Równanie postaci $ax = b$ przy założeniu $x \in D$ nazywamy liniowym (z założeniami), a zbiór D nazywamy dziedziną tego równania.

Oczywiście, przy poszukiwaniu rozwiązania takiego równania, interesują nas tylko takie liczby x które spełniają dane równanie i jednocześnie należą do zbioru D .

Przykład 2.7. Rozwiążmy równanie $3x = 5$ przy założeniu $x \in \mathbb{N}$. Oczywiście równanie takie nie ma rozwiązań, otrzymujemy zbiór pusty ($x \in \emptyset$). (dlaczego?)

Przykład 2.8. Rozważmy równanie $6x = 2$ przy założeniu $x \in (0, \infty)$. Równanie to ma jedno rozwiązanie $x = \frac{1}{3}$.

Przykład 2.9. Równanie $0x = 0$ przy założeniu $x \in \langle 0, \infty \rangle$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, czyli ... jego rozwiązaniem jest cała dziedzina (wszystkie liczby z dziedziny spełniają to równanie), czyli: $x \in \langle 0, \infty \rangle$.

Najprostszym sposobem rozwiązywania równania liniowego $ax = b$ z założeniem $x \in D$ jest rozwiązanie „zwykłego” równania liniowego, a następnie obliczenie części wspólnej zbioru rozwiązań oraz zbioru D .

Uwaga 2.10. Jeśli w czasie pracy nad rozwiązaniem jakiegoś problemu otrzymasz równanie (niekoniecznie liniowe) ZAWSZE zastanów się, czy nie jest ono „obarczone” jakimś założeniem.

Przykład 2.11. Spróbujmy rozwiązać zadanie o następującej treści: Jeden bilet do kina kosztuje 10 zł. Za ile takich biletów zapłacisz 37 zł? Aby rozwiązać to zadanie, musimy w zasadzie rozwiązać proste równanie: $10x = 37$, ale przy założeniu $x \in \mathbb{N}$ (dlaczego?) - i oczywiście okazuje się, że rozwiązaniem jest zbiór pusty.

Przykład 2.12. Równanie postaci: $\frac{-x-3}{x+2} = \frac{x+1}{x+2}$ jest oczywiście równoważne równaniu $-2x = 4$, gdzie $x \neq -2$ (dlaczego?). Jest to równanie sprzeczne (zbiorem rozwiązań jest zbiór pusty).

2.4 Zadania

Zadanie 16. Podaj liczbę pierwiastków danego równania w zależności od wartości występujących parametrów.

a) $mx - 1 = 2x$,

b) $m^2x + m = x + 1$,

c) $ax + b = cx$,

d) $a^2x + 3 = 2 - (b^2 + 1)x$,

e) $ax^2 + 3x - 4 = 7 + a^2$.

Zadanie 17. Rozwiąż podane równanie (uwzględniając wszystkie możliwości dla parametrów).

a) $4x + 3 = mx - m$,

c) $k^2x - 1 = x - k$,

b) $3x - m = mx - 3$,

d) $ax + 4 = 8x - b$.

Zadanie 18. Rozwiąż podane równania:

- a) $(x-3)(x+4) - 2(3x-2) = (x-4)^2$, gdzie $x \in \mathbb{N}$,
b) $\frac{15}{2x+7} = \frac{6}{x+2}$,
c) $5(x-1)^2 - 2(x+3)^2 = 3(x+2)^2 - 7(6x-1)$, gdzie $x \geq 0$,
d) $(x+1)^3 - (x-1)^3 = 6(x^2+x+1)$, gdzie $x \neq 2$.

Zadanie 19. Na pewnym sprawdzianie z matematyki było do rozwiązania 10 zadań. Ustalono również następujące zasady. Za dobrze rozwiązane zadanie uczeń otrzymywał 5 punktów, natomiast za każde błędne rozwiązanie uczeń tracił 3 punkty. Ile zadań zostało rozwiązanych dobrze jeśli uczeń otrzymał:

- a) 34 punkty, b) 12 punktów, c) 2 punkty, d) -7 punktów?

Zadanie 20. Długopis kosztuje 3 zł. Ile kosztuje ołówek, jeśli za 2 długopisy i 3 ołówki zapłacono:

- a) 9 zł, b) 7 zł, c) 7 zł. i 50 gr?

3 Układy równań liniowych

Definicja 3.1. Układem dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy układ postaci:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases},$$

gdzie przynajmniej jeden z paramterów a_1 i b_1 oraz przynajmniej jeden z parametrów a_2 i b_2 jest różny od zera (to założenie jest potrzebne po to, aby każde z równań wyznaczało na płaszczyźnie pewną prostą).

Problem 3.1. Jaki zbiór punktów na płaszczyźnie określa równanie $0x+0y = c$. Czy zbiór ten zależy od wartości parametru c ?

3.1 Metody rozwiązywania układów równań

Ponieważ każde z równań określa pewną prostą na płaszczyźnie zatem rozwiązaniem układu są pary (x, y) wyznaczające punkty wspólne tych prostych. Jak wiadomo dwie proste mogą mieć 0, 1 lub ∞ punktów wspólnych (czy potrafisz

wykonać odpowiednie rysunki?). Z tego wynika, że rozważany układ równań może albo być sprzeczny, albo mieć dokładnie jedno rozwiązanie (mówimy wtedy że jest oznaczony) albo mieć ∞ wiele rozwiązań (mówimy wtedy, że jest nieoznaczony).

Istnieje wiele metod rozwiązywania układów równań. Jeśli układ nie zawiera parametrów, to możemy użyć:

1. metody podstawiania,
2. metody przeciwnych współczynników,
3. metody graficznej,
4. metody wyznaczników.

W układach bez parametrów, preferowane jest używanie jednej z dwóch pierwszych metod. (Przypomnij sobie na czym polegają metody 1, 2 i 3). Jeśli natomiast układ zawiera choć jeden parametr, wydaje się, że metoda wyznaczników jest „najbezpieczniejsza” i najefektywniejsza.

3.2 Metoda wyznaczników

Metoda wyznaczników jest najbardziej uniwersalną metodą rozwiązywania układów równań liniowych. W matematyce używa się jej postaci ogólnej, zwanej metodą bądź wzorami Cramera. Metoda taka pozwala na rozwiązywanie, w bardzo prosty sposób, układów wielu równań z dużą liczbą niewiadomych. My w naszych rozważaniach ograniczymy się do układów dwóch równań z dwoma niewiadomymi. Poniżej zebrano podstawowe definicje i fakty, potrzebne przy korzystaniu z tej metody.

Definicja 3.2 (wyznaczniki układu równań). Dla układu:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

wyznacznikiem głównym nazywamy liczbę W określoną wzorem:

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Uwaga 3.3 (interpretacja geometryczna wyznacznika). Wyznacznik główny informuje nas, czy proste, których równania występują w układzie równań są równoległe czy nie.

Aby zbadać ile rozwiązań ma dany układ równań warto posłużyć się wyznacznikiem. Poniżej zebrano kilka faktów wiążących wyznacznik, właśnie z ilością rozwiązań układu równań.

Fakt 3.4. *Jeśli wyznacznik główny układu $W = 0$, to proste wyznaczane przez ten układ są równoległe. Jeśli natomiast wyznacznik główny $W \neq 0$, to proste te nie są równoległe.*

Fakt 3.5. *Jeśli wyznacznik głównej układu $W \neq 0$, to układ jest oznaczony - ma dokładnie jedno rozwiązanie. I odwrotnie, jeśli układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, to jego wyznacznik główny napewno jest różny od zera.*

Fakt 3.6. *Jeśli wyznacznik głównej układu $W = 0$, to układ nie jest oznaczony - to znaczy albo okaże się być sprzeczny albo ma ∞ wiele rozwiązań.*

Uwaga 3.7. Zauważmy, że gdy $W = 0$, to dalej nie wiemy, ile rozwiązań posiada układ równań. Sposób poradzenia sobie z tą „przeszkodą” zilustruje poniższy przykład.

Przykład 3.8 (badanie ilości rozwiązań układu równań z parametrem). W zależności od parametru m zbadamy ilość rozwiązań układu:

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ 3x + 3my = 3 \end{cases}$$

Obliczmy wyznacznik główny tego układu.

$$W = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 3 & 3m \end{vmatrix} = 3m^2 - 3.$$

Sprawdźmy kiedy $W = 0$:

$$3m^2 - 3 = 0 \quad \text{gdy} \quad m = 1 \quad \text{lub} \quad m = -1.$$

Dla pozostałych m , zachodzi $W \neq 0$, zatem wiadomo już, że jeśli $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, to układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Pozostaje sprawdzić co się dzieje dla $m = 1$ oraz dla $m = -1$ (w obu przypadkach proste wyznaczane przez układ równań są równoległe, nie wiadomo jednak czy pokrywają się czy też nie mają punktów wspólnych).

Jeśli $m = 1$ to nasz układ przyjmuje konkretną postać:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$$

Wystarczy podzielić drugie równanie obustronnie przez 3 aby otrzymać:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Bez żadnych dalszych wyliczeń łatwo możemy stwierdzić, że oba równania opisują tę samą prostą - czyli, w tym przypadku układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Jeśli natomiast $m = -1$, to układ nasz przybiera postać:

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases}$$

Wystarczy teraz pierwsze z równań pomnożyć przez -1 a drugie podzielić przez 3 (dążymy do zrównania współczynnika przy x), aby otrzymać:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Widać tutaj odrazu, że otrzymane proste są równoległe, ale napewno nie pokrywają się (są „rozsunięte”), stąd układ jest sprzeczny.

Zbierzmy więc uzyskane wyniki. Okazało się, że jeśli $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, to układ ma 1 rozwiązanie. Jeśli $m = -1$, to układ nie ma rozwiązań, jeśli natomiast $m = 1$, to układ ma ∞ wiele rozwiązań.

Aby poradzić sobie z rozwiązaniem (a nie tylko z podaniem liczby rozwiązań) układu który posiada parametry, wprowadzimy tzw. wyznaczniki szczegółowe.

Definicja 3.9 (wyznaczniki szczegółowe układu równań). Wyznacznikami szczegółowymi niewiadomych x i y nazywać będziemy odpowiednio liczby:

$$W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1,$$

oraz

$$W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1.$$

Fakt 3.10. *Jeśli wyznacznik główny układu $W \neq 0$, to rozwiązaniem układu jest para liczb:*

$$\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} \\ y = \frac{W_y}{W} \end{cases}.$$

Co więcej można udowodnić następujące własności.

Fakt 3.11. *Jeśli $W = 0$ oraz $W_x = W_y = 0$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.*

Fakt 3.12. *Jeśli $W = 0$ oraz przynajmniej jeden z wyznaczników szczegółowych W_x lub W_y jest różny od zera, to układ jest sprzeczny.*

3.3 Zadania

Zadanie 21. Używając metody podstawiania rozwiązać układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = 3 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$$

Zadanie 22. Używając metody przeciwnych współczynników rozwiąż układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{1}{2}x - 3y = 8 \\ -2x + 6y = 16 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 4x - y = 3 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases}$$

Zadanie 23. Podany układ zilustruj graficznie i jeśli to możliwe podaj dokładne rozwiązanie.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x + y = 10 \\ -x + y = -2 \end{cases}$$

Omów wady metody graficznej.

Zadanie 24. Przypuśmy, że $b_1 \neq 0$ i $b_2 \neq 0$. Wtedy każdy taki układ dwóch równań liniowych można sprowadzić do postaci:

$$\begin{cases} y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} \\ y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

Posługując się interpretacją graficzną podaj jak ilość rozwiązań zależy od liczb: $-\frac{a_1}{b_1}$, $-\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{c_1}{b_1}$, $\frac{c_2}{b_2}$.

Zadanie 25. W każdym z podanych niżej przypadków wylicz W i jeśli $W \neq 0$, to rozwiąż dany układ metodą wyznaczników, a jeśli $W = 0$, to przez odpowiednie pomnożenie przekształć układ do postaci, z której „widać” ilość rozwiązań:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \begin{cases} x + 2y = 11 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 3x - y = 5 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 2x + 5y = 25 \\ -4x - 10y = -50 \end{cases} \\
 \text{b)} \begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 3x + 8y = -1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 28x + 35y + 3 = 0 \\ 12x + 15y + 25 = 0 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 7x - 3y + 1 = 0 \\ 4x - 5y + 17 = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

Zadanie 26. W zależności od paramteru (parametrów) podaj liczbę rozwiązań dla:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \begin{cases} m^2x + y = 1 \\ x + y = m \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} (a - 3)x - 4y = b \\ 9x - (a + 2)y = -9 \end{cases} \\
 \text{b)} \begin{cases} x + y = a \\ mx + y = 0 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + my = 2m \end{cases}
 \end{array}$$

Zadanie 27. W zależności od parametru m rozwiąż podany układ:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \begin{cases} 3x + my = -2 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases} & \text{b)} (\star) \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + my = 2m \end{cases} \\
 \text{c)} (\star) \begin{cases} mx + y = m \\ x + my = m^2 \end{cases}
 \end{array}$$

Zadanie 28. W zależności od paramteru k podaj liczbę rozwiązań układu:

$$\begin{cases} kx + y = k^2 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

i odpowiedz, dla jakich wartości parametru k układ:

1. jest niesprzeczny, nie,
2. ma co najmniej jedno rozwiązanie, 5. ma conajmniej dwa rozwiązania,
3. jest nieoznaczony, 6. ma dokładnie siedem rozwiązań,
4. ma co najwyżej jedno rozwiązanie, 7. $(\star)$ ma rozwiązanie będące parą liczb przeciwnych.

Zadanie 29. Dla jakich wartości parametru b punkt przecięcia prostych danych równaniami:

$$\begin{cases} 2x - 3by = 5b \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

należy do czwartej ćwiartki układu współrzędnych?

Zadanie 30. W zależności od paramteru m podaj rozwiązanie układów równań:

$$\text{a)} \begin{cases} 2mx - (m+2)y = 3m \\ 2(m-1)x - my = 3(m-1) \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} mx - 2(m-2)y = m+3 \\ (m-1)x - 2my = m \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} x + m(m-1)y = 2m^2 \\ x - (m^2-1)y = m(1-m) \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} (m+1)^2x - (m^2-1)y = m+1 \\ (m-1)^2x - (m^2-1)y = (m-1)^2 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} (m+1)x - (m-1)y = 2m^2 \\ mx - (m+1)y = m(1-m) \end{cases}$$

Zadanie 31. W następujących układach równań przyjmij jedną niewiadomą za parametr i oblicz wartości pozostałych niewiadomych.

$$\text{a)} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} m + 3p - t = 2 \\ 2m + t = 5 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} 4a + b = 3 \\ 2b - c = 4 \end{cases}$$

3.4 Układy trzech (i więcej) równań liniowych

W poprzednich podrozdziałach skupialiśmy się głównie na rozwiązywaniu układów dwóch równań, w którym występowały dwie niewiadome (i czasem parametry). Możliwe jest jednak rozwiązywanie większych układów równań.

Metoda wyznaczników dla układów trzech równań liniowych. Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Dla takiego układu równań zdefiniujemy znane już wcześniej pojęcie.

Definicja 3.13 (wyznacznik główny układu trzech równań liniowych). Wyznacznikiem głównym układu trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi nazywamy liczbę:

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

Uwaga 3.14 (wyznaczniki szczególne). Analogicznie do powyższej definicji, możemy podać wzory na wyznaczniki szczególne W_x, W_y, W_z , w których odpowiednią kolumnę zamieniamy na kolumnę d_1, d_2, d_3 i korzystamy z wzoru danego w definicji.

Większość twierdzeń odnośnie liczby rozwiązań układu równań liniowych są nadal prawdziwe. W szczególności:

- jeśli wyznacznik główny jest różny od zera, to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie,
- jeśli wyznacznik główny równy jest zero, a któryś (przynajmniej jeden) z wyznaczników szczególnych jest różny od zera, to układ jest sprzeczny.

Zachodzą również wzory:

$$\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} \\ y = \frac{W_y}{W} \\ z = \frac{W_z}{W} \end{cases}$$

W odróżnieniu od przypadku dwóch równań z dwiema niewiadomymi, zerowanie się wszystkich wyznaczników nie rozstrzyga czy układ jest sprzeczny czy ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Uwaga 3.15. Powyższa metoda wyznaczników, „działa” również dla większych układów równań. Wzory tej metody ogólnie nazywa się wzorami Cramera. Można o nich przeczytać w internecie na przykład tu: http://pl.wikipedia.org/wiki/Wzory_Cramera. Istnieje również bardzo „szybka” metoda rozwiązywania dowolnych, dużych układów równań zwana metodą eliminacji Gaussa, o której można poczytać na przykład tu http://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_Gaussa.

3.5 Zadania dodatkowe

Zadanie 32. Rozwiąż układ równań:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - y - z = 2 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y - 2z = 7 \\ 2x - y + 2z = 8 \\ 3x + 2y - 2z = 20 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + 4y - 5z = 42 \\ 4x + 3y + 4z = -2 \\ 2x - 6y - 8z = -6 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + 4y - 3z = -2 \\ x - 3y - 2z = -13 \\ x + 9y - 5z = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 3x + 4y + 2t = 7 \\ -2x - y + 3t = 6 \\ 4x + 3y + 5t = 7 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x + y + z = 21 \\ 2y - 5z = 0 \\ 6x - 7z = 0 \end{cases}$$

4 Funkcja kwadratowa

4.1 Podstawowe definicje.

Definicja 4.1 (funkcja kwadratowa). Funkcją kwadratową nazywamy dowolną funkcję postaci: $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, natomiast b i c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Uwaga 4.2. Jeśli w zadaniu pojawi się funkcja, która „wygląda” jak funkcja kwadratowa, ale współczynnik przy x^2 zawiera parametr (np. $f(x) = (m + 1)x^2 + mx - 3$) to najczęściej musimy rozpatrzyć osobno dwa przypadki: funkcji kwadratowej (gdy $m \neq -1$) oraz funkcji liniowej (gdy $m = -1$).

Wykres funkcji kwadratowej. Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. „Sklada” się ona z wierzchołka i dwóch ramion, które albo są skierowane do góry (gdy $a > 0$) albo na dół ($a < 0$). **Współrzędne wierzchołka** obliczamy ze wzorów: $W = (p, q)$, gdzie

$$p = \frac{-b}{2a}, q = \frac{-\Delta}{4a},$$

no i oczywiście $\Delta = b^2 - 4ac$. Symbol Δ zwany **wyróżnikiem** rozpatrywanego trójkianu kwadratowego informuje nas o ilości miejsc zerowych:

- jeśli $\Delta > 0$, to funkcja posiada dwa miejsca zerowe,
- jeśli $\Delta = 0$, to funkcja posiada jedno miejsce zerowe,
- jeśli $\Delta < 0$, to funkcja nie posiada miejsc zerowych.

Fakt 4.3. Jeśli $a \neq 0$ i $\Delta \geq 0$, to miejsca zerowe dane są wzorami: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. (Jeśli $\Delta = 0$, to oba wzory dają tę samą liczbę oznaczaną przez x_0 .)

Uwaga 4.4. Parametr c oznacza miejsce przecięcia wykresu z osią OY (ponieważ oczywiście $f(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = c$).

4.2 Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej.

Jeśli chcemy narysować wykres funkcji kwadratowej, to:

1. wyliczamy wierzchołek $W(p, q)$ i zaznaczamy go na wykresie,
2. zaznaczamy punkt $(0, c)$ - miejsce przecięcia z osią OY ,
3. korzystając z faktu, że parabola ma oś symetrii (jest to prosta o równaniu $x = p$) i zaznaczamy punkt symetryczny do $(0, c)$ który ma współrzędne $(2p, c)$,
4. jeśli istnieją miejsca zerowe i są łatwe do obliczenia, zaznaczamy je na osi OX ,
5. przez otrzymane punkty prowadzimy krzywą o kształcie możliwie najbardziej zbliżonym do paraboli (pamiętając o symetryczności, o niezłamywaniu ramion i o gładkim wierzchołku).

Uwaga 4.5. Może się zdarzyć, że z kroków 1 – 4 dostajemy zaledwie jeden punkt (np. dla funkcji $f(x) = x^2 + 4$). Wtedy należy wyliczyć wartość np. dla $x = 1$ (wybieramy takie parametry x dla których obliczenia są możliwie najprostsze) i otrzymany punkt, wraz z punktem do niego symetrycznym, zaznaczamy na rysunku.

4.3 Wzory Viete’a.

Poznamy dwa wzory które ułatwiają bardzo wiele obliczeń. Zapamiętanie ich i częste stosowanie, pozwala rozwiązać wiele zadań, które bez tych wzorów mogły być dość skomplikowane.

Fakt 4.6 (wzory Viete’a). *Jeśli $a \neq 0$ i $\Delta \geq 0$, to:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Uwaga 4.7. Wzory Viete’a pozwalają powiedzieć coś o x_1 i x_2 bez potrzeby wyliczania tych liczb.

Przykład 4.8 (zastosowanie wzorów Viete’a). Niech $f(x) = x^2 - 8x + 6$. Wyróżnik tego trójmianu Δ wynosi 40, co oznacza, że funkcja ma dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2 . Łato zauważyć, że oba miejsca zerowe będą liczbami nie

wymiernymi. Jednak wiele rzeczy o tych pierwiastkach można powiedzieć, nie znając ich dokładnej wartości. Zapiszmy wzory Viete'a dla tej funkcji:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 x_2 = 6 \end{cases}$$

Odrzuć widać stąd, że obie liczby x_1 i x_2 są dodatnie (dlaczego?). Bez wyliczania wartości tych pierwiastków można również powiedzieć (policzyć), że:

- a) suma kwadratów x_1 i x_2 wynosi: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 8^2 - 2 \cdot 6 = 64 - 12 = 52$,
- b) suma odwrotności x_1 i x_2 wynosi: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$,
- c) odległość x_1 i x_2 wynosi: $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{8^2 - 4 \cdot 6} = \sqrt{40}$,

Podobnymi metodami można wyliczyć (prawie) każde inne wyrażenie symetryczne ze względu na x_1 i x_2 . (Symetryczne, to znaczy, że gdy zamienimy rolami x_1 oraz x_2 to nic się nie zmienia.)

4.4 Funkcja kwadratowa w różnej postaci.

Istnieje wiele postaci zapisu wzoru funkcji kwadratowej. Poniżej zebrano kilka najczęściej używanych form, wraz z podanymi zaletami każdego ze sposobów.

1. **Postać ogólna:** $f(x) = ax^2 + bx + c$ - „widać” punkt przecięcia z osią OY , łatwo otrzymać wzory Viete'a.
2. **Postać kanoniczna:** $f(x) = a(x - p)^2 + q$ - „widać” wierzchołek oraz liczbę miejsc zerowych.
3. **Postać iloczynowa:** $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (istnieje tylko wtedy, gdy $\Delta \geq 0$, co więcej gdy $\Delta = 0$ skraca się do zapisu $f(x) = a(x - x_0)^2$) - „widać” miejsca zerowe.

Warto znać podane wyżej zapisy, tak aby można było w odpowiednich zadaniach od razu zastosować odpowiedni zapis i odczytać możliwie jak najwięcej informacji bez wykonywania dodatkowych obliczeń.

4.5 Własności funkcji kwadratowej.

Poniżej zebrano podstawowe własności funkcji kwadratowej.

1. **Zbiór wartości funkcji kwadratowej.** Jeśli $a > 0$, to zbiorem wartości jest przedział $\langle q, \infty \rangle$, jeśli natomiast $a < 0$, to zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, q]$. Czy wiesz dlaczego?
2. **Monotoniczność.** Żadna funkcja kwadratowa nie jest monotoniczna, a jedynie przedziałami monotoniczna. Jeśli $a > 0$, to funkcja maleje w przedziale $(-\infty, p)$ a rośnie w przedziale (p, ∞) . Natomiast, jeśli $a < 0$, to funkcja rośnie w przedziale $(-\infty, p)$ natomiast rośnie w przedziale (p, ∞) .
3. **Różnowartościowość.** Żadna funkcja kwadratowa **nie** jest różnowartościowa, a co za tym idzie nie posiada funkcji odwrotnej.

4.6 Funkcja kwadratowa określona na przedziale domkniętym.

Bardzo często rozwiązanie problemu sprowadza się do rozważenia funkcji: $f(x) = ax^2 + bx + c$ przy założeniu, że $x \in \langle r_1, r_2 \rangle$, gdzie r_1 oraz r_2 to dowolne liczby rzeczywiste takie, że $r_1 < r_2$. Co prawda funkcja ta jest dana wzorem funkcji kwadratowej, ale jej dziedziną nie jest cały zbiór liczb rzeczywistych a jedynie przedział $\langle r_1, r_2 \rangle$. Mówimy, że obcinamy funkcję kwadratową do przedziału $\langle r_1, r_2 \rangle$. Wykresem tej funkcji nie jest cała parabola, a jedynie jej fragment zawarty między prostymi $x = r_1$ oraz $x = r_2$ (łączeni z punktami końcowymi).

Problem 4.1. Rozważ funkcję $f(x) = x^2$ obciętą do różnych przedziałów, np: $x \in \langle -1, 2 \rangle$, $x \in \langle 1, 2 \rangle$, $x \in \langle 0, 3 \rangle$, $x \in \langle -2, -1 \rangle$. Spróbuj omówić „typy” otrzymanych wykresów. Zauważmy, że otrzymane funkcje mogą mieć różne własności - inne niż funkcja przed obcięciem. W pewnych sytuacjach możemy otrzymać funkcję monotoniczną, różnowartościową, ze zmniejszoną liczbą miejsc zerowych itd. Najważniejszą nową własnością jest fakt, że każda taka funkcja posiada wartość największą oraz wartość najmniejszą (mówimy, że funkcja osiąga swoje kresy).

Przykład 4.9 (wartość największa i najmniejsza). Rozważmy poniższe funkcje. Wszystkie dane będą jednym wzorem $f(x) = x^2 - 4$.

1. Niech w tym przypadku, dziedziną funkcji będzie cały zbiór liczb rzeczywistych. Wtedy, nasza funkcja posiada wartość najmniejszą, która

wynosi -4 i jest osiągnięta dla $x = 0$, ale nie posiada wartości największej.

2. Obetnijmy dziedzinę do przedziału $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Otrzymujemy nową (inną!) funkcję. Podobnie jak poprzednio posiada ona wartość największą -4 którą osiąga dla $x = 0$. W odróżnieniu jednak od poprzedniej, ta funkcja posiada również wartość największą -3 , którą osiąga w dwóch miejscach, dla $x = \pm 1$.
3. Niech teraz, dziedziną naszej nowej funkcji będzie inny przedział: $x \in \langle 1, 2 \rangle$. Taka funkcja posiada wartość najmniejszą, która wynosi -3 i jest osiągnięta dla $x = 1$ oraz wartość największą, która wynosi 0 i jest osiągnięta dla $x = 2$.

Aby lepiej zrozumieć powyższy przykład, wykonaj odpowiednie rysunki.

4.7 Zadania

Zadanie 33. Dla podanych funkcji znajdź postać ogólną, kanoniczną, iloczynową, wierzchołek paraboli i miejsca zerowe:

- a) $f(x) = 2x^2 + 6x + 8$,
- b) $f(x) = 2(x - 3)^2$,
- c) $f(x) = (x + 3)^2 - 6$,
- d) $f(x) = 2x^2 + 6x$.

Zadanie 34. Naszkicuj wykresy funkcji z zadania 1, podaj przedziały monotoniczności i zbiór wartości.

Zadanie 35. Wyznacz wartości współczynników b i c funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ tak, aby:

- a) do wykresu tej funkcji należały punkty $(1, 1)$ oraz $(0, -5)$,
- b) do wykresu tej funkcji należały punkty $(3, 9)$ oraz $(-1, -9)$,
- c) funkcja ta miała dwa miejsca zerowe 2 i -3 ,
- d) funkcja ta miała dokładnie jedno miejsce zerowe 3 ,
- e) funkcja ta osiągnęła minimum równe 5 dla $x = -2$,

f) jej wykres przecinał oś OY w punkcie $(0, 3)$ i był styczny do osi OX .

Rozwiązania zobrazuj na odpowiednim rysunku.

Zadanie 36. Dla jakich wartości parametru m podana funkcja posiada dokładnie jedno miejsce zerowe:

a) $f(x) = mx^2 + 3x + 4$,

b) $f(x) = x^2 - mx + 2$,

c) $f(x) = (m + 1)x^2 - 2(m + 1)x + 3m$.

Zadanie 37. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji f w podanym przedziale:

a) $f(x) = -2x^2 + 2x - 1$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$,

b) $f(x) = x^2 + 4x - 2$, $x \in \langle -1, 2 \rangle$,

c) $f(x) = x - x^2$. $x \in \langle 0, 2 \rangle$.

Zadanie 38. Wyróżniki podanych trójmianów są dodatnie (sprawdź to!). Oblicz sumę i iloczyn miejsc zerowych każdego z trójmianów (bez wyliczania wartości tych miejsc zerowych):

a) $f(x) = x^2 - 8x + 12$,

b) $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$,

c) $f(x) = -3x^2 + 5x + 2$,

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 3$.

Jakiego znaku są miejsca zerowe każdego z tych trójmianów?

Zadanie 39. Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = x^2 + (m - 1)x + 3$:

a) przyjmuje tylko wartości dodatnie,

b) przyjmuje tylko wartości ujemne,

c) jest funkcją parzystą.

Zadanie 40. Poniższe wyrażenia przedstaw za pomocą $x_1 + x_2$ oraz x_1x_2 :

a) $x_1^3 + x_2^3$,

b) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$,

Zadanie 41. Funkcja $f(x) = x^2 + bx + c$ przyjmuje wartość najmniejszą dla $x = -4$. Wyznacz wartość współczynników b i c , jeżeli:

- a) najmniejsza wartość funkcji jest równa 3,
b) funkcja ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

Zadanie 42. Piłkę rzucono pionowo do góry. Odległość h (w metrach) piłki od ziemi w zależności od czasu t (w sekundach) opisuje funkcja:

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 2.$$

- a) Z jakiej wysokości wyrzucono piłkę?
b) Po jakim czasie piłka osiągnęła maksymalną odległość od ziemi i ile ona wynosiła?
c) Czy po 3 sekundach piłka była już na ziemi?

Zadanie 43. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{dla } x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 4 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$.

- a) Naskicuj wykres funkcji f i wyznacz jej miejsca zerowe.
b) Odczytaj z wykresu przedziały monotoniczności funkcji f .

5 Równania i nierówności kwadratowe

5.1 Równanie kwadratowe.

Definicja 5.1 (równanie kwadratowe). Równaniem kwadratowym nazywamy równanie postaci:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{gdzie } a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}.$$

Przykład 5.2. Rozważmy równanie: $(m - 1)x^2 - 2mx + m = 0$ ($m \in \mathbb{R}$ jest parametrem). W zależności od wartości parametru, zachodzi jeden z przypadków:

- jest to równanie liniowe dla $m = 1$,
- jest to równanie kwadratowe dla $m \neq 1$.

5.1.1 Liczba rozwiązań równania kwadratowego.

Fakt 5.3 (liczba rozwiązań równania kwadratowego). *Jeśli $\Delta > 0$, to równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania: $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ lub $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Jeśli $\Delta = 0$, to równanie kwadratowe ma jedno rozwiązanie, $x = \frac{-b}{2a}$. Jeśli $\Delta < 0$, to równanie kwadratowe nie ma rozwiązań - jest sprzeczne.*

Przykład 5.4. Zastanówmy się ile rozwiązań, w zależności od parametru m , ma równanie $mx^2 + 4x - 1 = 0$. Zauważmy, że jeśli $m = 0$, to powyższe równanie, nie jest równaniem kwadratowym i redukuje się do równania postaci: $4x - 1 = 0$, które jako równanie liniowe, oczywiście ma jedno rozwiązanie ($x = \frac{1}{4}$). Jeśli natomiast $m \neq 0$, to mamy doczynienia z równaniem kwadratowym. Możemy wobec tego policzyć deltę: $\Delta = 16 + 4m$ (należy pamiętać, że obliczona Δ istnieje tylko w przypadku gdy $m \neq 0$). Łatwo zatem policzyć, że jeśli $m > -4$ (przy założeniu $m \neq 0$!) to $\Delta > 0$, czyli równanie ma wówczas dwa różne pierwiastki. Jeśli $m = -4$, to $\Delta = 0$, co daje równanie tylko z jednym pierwiastkiem. Jeśli natomiast $m < -4$, to $\Delta < 0$, wobec czego równanie jest sprzeczne. Zbierzmy uzyskane wyniki:

- Jeśli $m \in (-4, 0) \cup (0, \infty)$, to równanie ma 2 rozwiązania.
- Jeśli $m = -4 \vee m = 0$, to równanie ma 1 rozwiązanie.
- Jeśli $m \in (-\infty, -4)$, to równanie nie ma rozwiązań.

5.2 Nierówność kwadratowa.

Definicja 5.5. Nierównością kwadratową nazywać będziemy nierówności postaci: $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \neq 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, gdzie $a \neq 0$, oraz $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5.2.1 Graficzne przedstawienie nierówności kwadratowej.

Przy rozwiązywaniu nierówności kwadratowych, często najwygodniejszym sposobem jest skorzystanie z metody graficznej, która daje szybki i dokładny wynik. Aby rozwiązać nierówność kwadratową, postępujemy w następujący sposób. Szkicujemy przybliżony wykres funkcji kwadratowej danej wzorem z nierówności, przy czym najbardziej interesują nas w nim miejsca zerowe funkcji (nie musimy wyliczać współrzędnych wierzchołka, miejsca przecięcia z osią OY itd. - najczęściej w ogóle nie rysujemy osi OY !). Następnie patrzymy dla jakich wartości x nasz skicowany wykres jest "nad" osią OX , a dla jakich "pod" osią OX . Odpowiednio dla danej nierówności, wybieramy przedział który jest

rozwiązaniem nierówności. Powyższe rozumowanie pokażemy na kilku przykładach.

Przykład 5.6. Rozwiążemy nierówność $x^2 - 6x + 8 > 0$. Wykresem funkcji danej wzorem $f(x) = x^2 - 6x + 8$ jest parabola o ramionach skierowanych w górę, posiadająca dwa miejsca zerowe $x_1 = 2$ oraz $x_2 = 4$. Stąd otrzymujemy szybko odpowiedź: $x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$. (Narysuj samodzielnie odpowiedni rysunek i sprawdź czy rozumiesz, skąd wzięła się odpowiedź!)

Przykład 5.7. Pokażemy teraz, dla jakich wartości parametru m , rozwiązaniem nierówności: $2x^2 + 4x + m \geq 0$, jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

Wykresem lewej strony nierówności jest parabola o ramionach skierowanych w górę (dlaczego?). Aby każda liczba rzeczywista spełniała tę nierówność, parabola ta powinna "nie schodzić" poniżej osi OX , tzn. w całości musi znajdować się nad osią OX lub ewentualnie może się z nią stykać. Stąd dostajemy warunek $\Delta \leq 0$ (dlaczego?). Ponieważ $\Delta = 16 - 8m$, zatem $m \geq 2$. Zatem rozwiązaniem naszej nierówności $2x^2 + 4x + m \geq 0$ będzie cały zbiór liczb rzeczywistych, wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in \langle 2, \infty \rangle$. (Narysuj odpowiedni rysunek i zastanów się, czy rozumiesz jak otrzymaliśmy taką odpowiedź!)

Przykład 5.8. Rozważmy nierówność $(5-k)x^2 - 2(1-k)x + 2(1-k) < 0$, gdzie $k \in \mathbb{R}$ jest parametrem. Zastanówmy się dla jakich wartości tego parametru, rozwiązaniem nierówności jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

Pierwsze spostrzeżenie jest takie, że jedynie dla $k \neq 5$, dana nierówność jest rzeczywiście nierównością kwadratową. Dla $k = 5$ nierówność sprowadza się do nierówności liniowej $8x - 8 < 0$, której rozwiązaniem nie jest cały zbiór liczb rzeczywistych, tylko przedział $x \in (-\infty, 1)$. Stąd napewno $k = 5$ nie jest szukanym k . W dalszych rozważaniach zakładamy więc, że $k \neq 5$.

Skoro $k \neq 5$, to rozważana nierówność jest nierównością kwadratową i wykresem jej lewej strony jest parabola. Rozwiązaniem będzie cały zbiór liczb rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy cała parabola będzie leżeć pod osią OX , czyli $a < 0$ (ramiona muszą być skierowane w dół) oraz $\Delta < 0$ (nie może być miejsc zerowych). Otrzymujemy zatem następujące warunki:

$$\begin{cases} k \neq 5 \\ a = 5 - k < 0 \\ \Delta = 4(1 - k)^2 - 8(5 - k)(1 - k) < 0 \end{cases}$$

Drugi warunek daje $k > 5$, a trzeci: $k \in (-\infty, 1) \cup (9, \infty)$. Częścią wspólną wszystkich warunków jest szukana odpowiedź, czyli: $k \in (9, \infty)$.

5.3 Zadania

Zadanie 44. Rozwiąż równanie:

a) $(3x - 8)^2 - (4x - 6)^2 + (5x - 2)(5x + 2) = 96$,

b) $(2x - 7)^2 + (3x - 5)^2 + (4x - 9)(4x + 9) = 2(64 - 29x)$.

Zadanie 45. Uzasadnij, że równanie kwadratowe:

$$\sqrt{2}x^2 + (\sqrt{3} + 3)x + \sqrt{6} = 0$$

ma dwa pierwiastki. Nie obliczając wartości pierwiastków równania, oblicz sumę ich odwrotności.

Zadanie 46. Zbadaj liczbę pierwiastków równania $x^2 - 6x + 5 = m$ w zależności od parametru m . Zadanie rozwiąż na dwa sposoby: analitycznie oraz graficznie. Który ze sposobów jest efektywniejszy?

Zadanie 47. W zależności od parametru m podaj liczbę pierwiastków równania:

a) $x^2 - m^2 = 2mx + 1$,

b) $mx^2 + mx + m = 0$,

c) $(m - 5)x^2 + (5 - m)x - 3m = 0$.

Zadanie 48. Dla jakich wartości parametru m równanie $(m - 1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ ma 2 różne, ujemne pierwiastki rzeczywiste?

Zadanie 49. Rozwiąż nierówności:

a) $x^2 - 8x + 12 < 0$,

b) $x^2 < -4(x + 1)$,

c) $2x(x - 10) \geq 4(x - 8)$,

d) $x(x + 19) \leq 3(18 + 5x)$.

Zadanie 50. Dla jakich wartości parametru m zbiorem rozwiązań nierówności jest cały zbiór $\mathbb{R}$?

a) $x^2 - mx + m + 3 > 0$,

b) $(m^2 + 5m - 6)x^2 - 2(m - 1)x + 3 \geq 0$,

$$c) -x^2 + 4mx + 13 > 0.$$

Zadanie 51. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dokładnie jeden pierwiastek. Znajdź ten pierwiastek.

$$a) mx^2 + 2(m-1)x + m-3 = 0,$$

$$b) x^2 + mx + m + 3 = 0,$$

$$c) (m+1)x^2 - 2x + m - 1 = 0.$$

5.4 Typowe zadania

W tym podrozdziale zebrano kilka przykładów zadań, w których pojawia się funkcja, równanie bądź nierówność kwadratowa. Przeanalizuj poniższe przykłady i upewnij się, czy wszystko jest zrozumiałe.

Przykład 5.9. Zadanie: Wyznacz wartości parametru m , dla których równanie $(m+1)x^2 - 4mx + 2m + 3 = 0$ ma dokładnie dwa różne pierwiastki tego samego znaku.

Rozwiązanie: Jeśli $m = -1$, to równanie redukuje się do: $4x + 1 = 0$ i nie spełnia warunków zadania (bo równanie liniowe nie może mieć dwóch różnych pierwiastków tego samego znaku). Jeśli natomiast $m \neq -1$, to równanie jest kwadratowe. Wtedy ilość pierwiastków zależy od Δ , a znak pierwiastków ustalamy ze wzorów Viete'a. Otrzymujemy następujące warunki:

$$\begin{cases} m \neq -1 \\ \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

Drugi warunek daje nam sumę przedziałów: $m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (3, \infty)$. Z trzeciego warunku mamy: $m \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-1, \infty)$. Odpowiedzią będzie część wspólna otrzymanych wyników.

Odpowiedź: Równanie ma dwa pierwiastki tego samego znaku, gdy $m \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-1, -\frac{1}{2}) \cup (3, \infty)$.

Przykład 5.10. Zadanie: Wyznacz wartości parametru m , dla których wartość bezwzględna różnicy pierwiastków równania: $x^2 + mx + 12 = 0$ jest równa 1.

Rozwiązanie: Jest to równanie kwadratowe, więc aby móc mówić o różnicy pierwiastków, musimy mieć pewność że istnieją dwa różne pierwiastki. Mamy więc:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ |x_1 - x_2| = 1 \end{cases}$$

Z pierwszego warunku mamy:

$$\Delta = m^2 - 48$$

$$m^2 - 48 > 0$$

$$m \in (-\infty, -4\sqrt{3}) \cup (4\sqrt{3}, \infty)$$

Drugi warunek przekształcamy tak aby można było skorzystać ze wzorów Viete'a. Warunek $|x_1 - x_2| = 1$ jest spełniony, wtedy i tylko wtedy, gdy $(x_1 - x_2)^2 = 1$ (czy wiesz dlaczego?). Przekształcimy wyrażenie $(x_1 - x_2)^2$:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} = \frac{\Delta}{a^2}$$

A stąd mamy, że:

$$\frac{m^2 - 48}{1} = 1$$

$$m^2 = 49$$

$$m = 7 \vee m = -7$$

Odpowiedzią jest część wspólna wyników z oby warunków. W tym przypadku tą część wspólną stanowi dokładnie to co wyszło z warunku drugiego.

Odpowiedź: Zadanie jest spełnione dla $m \in \{-7, 7\}$.

Przykład 5.11. Zadanie: Wyznacz wartości parametru m , dla których liczba 5 leży pomiędzy pierwiastkami równania: $x^2 + 4mx + 3m^2 = 0$.

Rozwiązanie: Wykresem funkcji $f(x) = x^2 + 4mx + 3m^2$ jest parabola o ramionach skierowanych w górę. Jeśli $\Delta > 0$, to ma ona dwa miejsca zerowe. Co więcej 5 leży pomiędzy tymi pierwiastkami, wtedy i tylko wtedy, gdy $f(5) < 0$ (czy wiesz dlaczego? - sporządź szkic wykresu funkcji i spróbuj to wyjaśnić!).
Zatem:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 25 + 20m + 3m^2 < 0 \end{cases}$$

Obliczenia przeprowadzamy podobnie do poprzednich przykładów. (Ze względu na to podobieństwo pomijamy je tutaj - doprowadź obliczenia do końca i sprawdź odpowiedź!)

Odpowiedź: Zadanie jest spełnione dla $m \in (-5, -\frac{5}{3})$.

Przykład 5.12. Zadanie: Wyznacz wartości parametru m , dla których równanie: $x^2 + 4mx + 3m^2 = 0$ ma dwa pierwiastki, które są sinusem i cosinusem tego samego kąta ostrego.

Rozwiązanie: Oczywiście muszą istnieć dwa różne pierwiastki, czyli $\Delta > 0$. Aby były one sinusem i cosinusem tego samego kąta, musi zachodzić równość $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (czy wiesz dlaczego musi zajść ten warunek? przypomnij sobie „słynną” jedynkę trygonometryczną!). Chcemy również, aby kąt był ostry - czyli $x_1, x_2 > 0$ (dla kątów ostrych zarówno sinus jak i cosinus, przyjmują wartości nieujemne). Mamy zatem warunki:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1 > 0 \wedge x_2 > 0 \end{cases}$$

Dwa ostatnie warunki sprowadzamy do wzorów Viete’a:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} = 1$$

$$x_1 > 0 \wedge x_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

Pozostaje tylko dokończyć obliczenia, które są bardzo podobne do tych, które wykonywaliśmy w poprzednich przykładach.

Odpowiedź: Zadanie jest spełnione dla $m = \sqrt{15}$.

Przykład 5.13. Zadanie: Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ przyporządkowuje każdej liczbie $m \in \mathbb{R}$ liczbę rozwiązań równania $mx^2 + mx + 2 = 0$. Naskicuj wykres funkcji f .

Rozwiązanie: Zauważmy, że dla $m = 0$ równanie to nie jest kwadratowe i upraszcza się do: $2 = 0$. Takie równanie jest oczywiście sprzeczne. Wniosek: dla $m = 0$ mamy zero rozwiązań (czyli $f(0) = 0$).

Jeśli $m \neq 0$, to rozpatrywane równanie jest kwadratowe i liczba rozwiązań zależy od Δ : $\Delta = m^2 - 8m$.

Jeśli więc $m^2 - 8m > 0$ (i $m \neq 0$) to mamy 2 rozwiązania. Tak dzieje się dla $m \in (-\infty, 0) \cup (8, \infty)$. Dla $m = 8$ mamy 1 rozwiązanie. Dla $m \in (0, 8)$ równanie nie ma rozwiązań.

Zatem możemy już podać wzór na funkcję f :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \in \langle 0, 8 \rangle \\ 1 & \text{dla } m = 8 \\ 2 & \text{dla } m \in (-\infty, 0) \cup (8, \infty) \end{cases}$$

Teraz wystarczy tylko narysować wykres funkcji f korzystając z podanego wyżej wzoru. Dokończenie tego zadania pozostawiamy jako ćwiczenie czytelnikowi.

Przykład 5.14. Zadanie: Dla jakich wartości parametru m , suma kwadratów rozwiązań równania $x^2 - mx + m - 1 = 0$ jest najmniejsza?

Rozwiązanie: Sprawdźmy najpierw kiedy w ogóle istnieją dwa pierwiastki, czyli kiedy $\Delta > 0$.

$$\Delta = m^2 - 4(m - 1) = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2$$

Zatem dwa (różne) pierwiastki istnieją gdy $m \neq 2$.

Suma kwadratów pierwiastków saje się zapisać wzorami Viete'a, jako:

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}.$$

Stąd:

$$x_1^2 + x_2^2 = m^2 - 2(m - 1) = m^2 - 2m + 2.$$

Rozważmy zatem funkcję $f(m) = m^2 - 2m + 2$, gdzie $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Wykresem tej funkcji jest parabola z wymazanym punktem nad $m = 2$ (nie jest to na szczęście wierzchołek tej paraboli). Po naszkicowaniu tej paraboli, łatwo przekonać się, że najmniejszą wartość, funkcja f osiąga dla $m = 1$.

Odpowiedź: Dla $m = 1$ suma kwadratów pierwiastków danego równania jest najmniejsza. (Czy rozumiesz skąd wzięła się ta odpowiedź?)

5.5 Zadania dodatkowe

Po przeanalizowaniu powyższych przykładów, samodzielne rozwiązanie kilku podobnych zadań nie powinno spawić Ci problemu.

Zadanie 52. Wyznacz wartości parametru m , dla których równanie

$$(m - 1)x^2 + 2mx + 3m - 2 = 0$$

ma dwa pierwiastki o różnych znakach.

Zadanie 53. Wyznacz wartości parametru m , dla których równanie:

$$x^2 - 2x + 1 = 2xm + m^2$$

ma dwa różne pierwiastki dodatnie.

Zadanie 54. Wyznacz wartości parametru m , dla których iloczyn pierwiastków równania:

$$(m - 3)x^2 - (m + 2)x + 1 = 0$$

jest większy od 2.

Zadanie 55. Wyznacz wartości parametru m , dla których równanie:

$$x^2 + (6 - m)x + 2(6 - m) = 0,$$

ma dwa rozwiązania, takie, że suma ich kwadratów jest najmniejsza.

Zadanie 56. Wyznacz wartości parametru m , dla których pierwiastki równania:

$$x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$$

należą do przedziału $(-2, 4)$.

Zadanie 57. Wyznacz wartości parametru m , dla których równanie:

$$3x^2 + mx + \frac{3}{2} = 0$$

ma dwa rozwiązania, które są sinusem i cosinusem tego samego kąta.

Zadanie 58. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie $m \in \mathbb{R}$ liczbę rozwiązań równania:

a) $x^2 + mx + m = 0$,

b) $(m + 2)x^2 + 6mx + 4m - 1 = 0$.

Naszkicuj wykres funkcji f .

6 Zadanie domowe

Na następne zajęcia proszę zrobić przynajmniej 20 (słownie: *dwadzieścia*) zadań, tak aby zrobić przynajmniej po jednym zadaniem z każdego podrozdziału z zadaniami. Wśród tych zadań mogą być też rozwiązania problemów lub niedokończonych przykładów. Oczywiście można zrobić też więcej zadań. Zadania proszę przygotować na kartkach podpisanych imieniem i nazwiskiem (jeśli będzie wiele kartek proszę podpisać wszystkie albo spiąć je razem) – nie trzeba przepisywać treści zadań, wystarczy numery. Jeśli w danym zadaniu nie jesteś pewny/pewna rozwiązania zaznacz to na przykład przez duży znak zapytania;).