Analiza Matematyczna (część II)

Krzysztof Tartas Witold Bołt
na podstawie wykładów dr. Piotra Bartłomiejczyka

25 kwietnia 2004 roku

1 Rachunek całkowy jednej zmiennej.

1.1 Całka nieoznaczona.

Definicja 1.1.1 (funkcja pierwotna) *Funkcję F nazywamy **funkcją pierwotną** funkcji f, określonej na przedziale otwartym, jeżeli:*

$$\forall_x \; F'(x) = f(x).$$

Uwaga 1.1.1 *Jeżeli f jest określona na przedziale domkniętym $<a,b>$, to F nazywamy pierwotną f, jeżeli:*

$$\forall_{x \in <a,b>} \; F'(x) = f(x), \; F'_+(a) = f(a), \; F'_-(b) = f(b).$$

Twierdzenie 1.1.1 *Jeżeli dwie funkcje F i G są funkcjami pierwotnymi f w przedziale (a,b) lub $<a,b>$, to:*

$$F(x) = G(x) + const.$$

Definicja 1.1.2 (całka nieoznaczona) ***Całką nieoznaczoną** funkcji f nazywamy rodzinę wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f. Całkę nieoznaczoną oznaczamy symbolem: $\int f(x)dx$.*

Twierdzenie 1.1.2 *Każda funkcja ciągła w przedziale ab posiada w tym przedziale funkcję pierwotną.*

1.2 Ogólne wzory na całkowanie.

Zakładamy że funkcje f i g są ciągłe.

Twierdzenie 1.2.1 (addytywność całki) *Całka nieoznaczona jest addytywna, tzn.*

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Twierdzenie 1.2.2 (jednorodność całki) *Zachodzi wzór:*

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx,$$

co oznacza, że całka nieoznaczona jest jednorodna.

Wniosek: Powyższe dwa twierdzenia pozwalają traktować całkę jak przekształcenie liniowe.

Twierdzenie 1.2.3 (całkowanie przez części) *Zachodzi wzór:*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \qquad \text{o ile } f' \text{ i } g' \text{ są ciągłe.}$$

Twierdzenie 1.2.4 (całkowanie przez podstawienie)

$$\int g(f(x))f'(x)dx = \int g(y)dy.$$

Przy czym po wyznaczeniu prawej strony równości należy podstawić $y = f(x)$.

1.3 Całka Riemanna.

Niech $f\colon <a,b> \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną (niekoniecznie ciągłą). Zbiór punktów: $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, gdzie $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b$, nazywamy **podziałem przedziału** $<a,b>$. Niech:

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in < x_{i-1}, x_i >\}$$

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in < x_{i-1}, x_i >\}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Definicja 1.3.1 (suma dolna i suma górna) *Sumą dolną $s(f,P)$ (odpowiednio sumą górną $S(f,P)$) funkcji f dla podziału P nazywamy liczbę:*

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

$$\left(S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \right).$$

Fakt 1.3.1 *Jeżeli $m_i = \inf\{f(x) : x \in < x_{i-1}, x_i >\}$ i $M_i = \sup\{f(x) : x \in < x_{i-1}, x_i >\}$, to dla dowolnego podziału P:*

$$m(b-a) \leqslant s(f,P) \leqslant S(f,P) \leqslant M(b-a), \textit{gdzie:}$$

$$m = \inf\{f(x) : x \in < a,b >\},$$
$$M = \sup\{f(x) : x \in < a,b >\}.$$

Uwaga 1.3.1 *Z ostatniego faktu wynika, że sumy dolne i górne są ograniczone dla dowolnego podziału.*

Definicja 1.3.2 (całka dolna i górna) *Całką dolną (całką górną) Riemanna funkcji f na przedziale $<a,b>$ nazywamy liczby:*

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \sup\{s(f,P) : P \textit{ - podział przedziału } < a,b >\}$$

$$\left(\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx = \inf\{S(f,P) : P \textit{ - podział przedziału } < a,b >\} \right)$$

Definicja 1.3.3 (funkcja całkowalna w sensie Riemanna) *Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $<a,b>$ (krótko: $f \in \mathcal{R}$) jeżeli całka dolna jest równa całce górnej. Wspólną wartość obu tych całek nazywamy całką Riemanna funkcji f na przedziale $<a,b>$ i oznaczamy symbolem:*

$$\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Definicja 1.3.4 (zagęszczenie podziału) *Mówimy, że podział P^* jest zagęszczeniem podziału P, jeżeli $P \subset P^*$. Jeżeli dane są dwa podziały P_1 i P_2, to ich wspólnym zagęszczeniem nazywamy podział $P_1 \cup P_2$.*

Twierdzenie 1.3.2 *Jeżeli P^* jest zagęszczeniem podziału P, to:*

$$s(f, P) \leqslant s(f, P^*) \qquad S(f, P^*) \leqslant S(f, P)$$

Twierdzenie 1.3.3 *Zachodzi nierówność:*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Twierdzenie 1.3.4 (kryterium całkowalności w sensie Riemanna) *Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale <a,b> wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_P S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$$

Twierdzenie 1.3.5 *Jeżeli funkcja f :<a,b> $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ jest ciągła, to jest całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale.*

Uwaga 1.3.2 *Podobnie można pokazać, że jeżeli funkcja f jest monotoniczna na <a,b> lub ograniczona i ma skończoną ilość punktów nieciągłości w <a,b> to funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na <a,b>.*

1.4 Własności całki Riemanna

Twierdzenie 1.4.1 *Kilka podstawowych własności całki Riemanna (por. z własnościami całki nieoznaczonej):*

1. *Jeśli f i $g \in \mathcal{R}$ to $f \cdot g \in \mathcal{R}$ oraz $c \cdot f \in \mathcal{R}$. Ponadto całka Riemanna jest liniowa, tzn:*

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

2. *Jeżeli $f, g \in \mathcal{R}$ oraz $f(x) \leqslant g(x)$, to $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$*

Twierdzenie 1.4.2 (o podziale przedziału całkowania) *Jeżeli f jest całkowalna w sensie Riemanna na <a,b> oraz $a < c < b$, to f jest całkowalna w sensie Riemanna na <a,c> i <c,b> oraz:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Twierdzenie 1.4.3 (o wartości średniej) *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $<a,b>$, to istnieje punkt $c \in <a,b>$ taki, że:*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Uwaga 1.4.1 *Liczbę $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ nazywamy wartością średnią całkową funkcji f w przedziale $<a,b>$.*

Uwaga 1.4.2 *Wzór na wartość średnią możemy też zapisać:*

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx = f(a+\theta(b-a)) \ \theta \in <0,1>$$

Twierdzenie 1.4.4 (podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego) *Jeżeli funkcja f:$<a,b> \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to funkcja G:$<a,b> \to \mathbb{R}$ dana wzorem:*

$$G(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

zwana funkcją górnej granicy całkowania jest różniczkowalna w przedziale $<a,b>$, a ponadto:

$$G'(x) = f(x) \qquad G'_+(x) = f(a) \qquad G'_-(x) = f(b)$$

Wniosek Każda funkcja ciągła ma funkcję pierwotną.

Twierdzenie 1.4.5 (o ciągłości funkcji górnej granicy całkownia) *Jeżeli $f \in \mathcal{R}$ na $<a,b>$, to funkcja górnej granicy całkowania G :$<a,b> \to \mathbb{R}$, $G(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ jest ciągła.*

Twierdzenie 1.4.6 *Jeżeli funkcja f jest ciągła w $<a,b>$ oraz F jest dowolną pierwotną funkcji f, to zachodzi wzór:*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

1.5 Całki niewłaściwe

1.5.1 Całki o nieograniczonym przedziale całkownia.

Niech dana będzie funkcja ciągła $f :< a, \infty) \to \mathbb{R}$. Wówczas dla każdego $x \geqslant a$ istnieje całka $\int\limits_a^x f(t)dt$.

Definicja 1.5.1 (całka niewłaściwa pierwszego rodzaju) *Niech* $G(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. *Jeżeli istnieje* $\lim\limits_{x\to\infty} G(x)$, *to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą (pierwszego rodzaju) i oznaczamy* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$. *Mówimy, że całka niewłaściwa jest zbieżna jeżeli granica ta jest skończona.*

Uwaga 1.5.1 *Analogicznie określamy:*

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{x\to-\infty} \int\limits_{x}^{a} f(t)dt$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$$

Uwaga 1.5.2 *Zachodzi wzór:* $\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} F(x) + F(a)$ *gdzie* F *- dowolna pierwotna* f.

1.5.2 Całki nieokreślone w jednym punkcie

Niech dana będzie funkcja f :<a,b) $\to \mathbb{R}$ ciągła. Dla każdego $x \in< a, b)$ istnieje całka $\int\limits_a^x f(t)dt$.

Definicja 1.5.2 (całka niewłaściwa drugiego rodzaju) *Jeżeli istnieje granica* $\lim\limits_{x\to b-} \int\limits_a^x f(t)dt$ *to granicę tą nazywamy całką niewłaściwą (drugiego rodzaju) i oznaczamy:* $\int\limits_a^b f(x)dx$. *Jeżeli granica ta jest skończona, to mówimy, że całka niewłaściwa jest skończona.*

Uwaga 1.5.3 *Tak samo określamy całkę z funkcji* f : (a,b>$\to \mathbb{R}$ *i* f : (a,b) $\to \mathbb{R}$.

1.5.3 Zależność pomiędzy zbieżnością szeregu liczbowego i całki niewłaściwej.

Twierdzenie 1.5.1 (Cauchy'ego - Maclaurina) *Niech dla* $x \geqslant a$ *funkcja* f *będzie ciągła, malejąca i nieujemna. Wówczas: całka* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy szereg liczbowy* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a+n)$ *jest zbieżny.*

Uwaga 1.5.4 *Twierdzenie to daje całkowe kryterium zbieżności szeregów liczbowych.*

2 Teoria szeregów Fouriera

2.1 Wiadomości wstępne.

Fakt 2.1.1

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b \cos nx dx = 0 = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b \sin nx dx$$

Twierdzenie 2.1.2 (Riemanna) *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $<a,b>$, to:*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\cos nx dx = 0 = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\sin nx dx$$

2.1.1 Dwa twierdzenia o wartości średniej dla całek.

Twierdzenie 2.1.3 *Niech dane będą dwie funkcje f i g ciągłe w przedziale domkniętym $<a,b>$. Niech przy tym funkcja g ma stały znak. Wówczas istnieje $\xi \in <a,b>$ takie, że:*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx$$

Twierdzenie 2.1.4 *Jeżeli funkcja f jest ciągła, a funkcja g monotoniczna i ma ciągłą pochodną w przedziale $<a,b>$ to istnieje $\xi \in <a,b>$ takie, że:*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int\limits_a^\xi f(x)dx + g(b)\int\limits_\xi^b f(x)dx$$

2.1.2 Zbieżność całki niewłaściwej

Twierdzenie 2.1.5 (Warunek Cauchy'ego zbieżności całki niewłaściwej) *Na to, aby całka $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ była zbieżna (do granicy skończonej) potrzeba i wystarcza, aby:*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_r\forall_{r<x<x'}\left|\int\limits_x^{x'} f(t)dt\right| < \varepsilon$$

Twierdzenie 2.1.6

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

Uwaga 2.1.1 *Całka $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ jest zbieżna, ale nie jest bezwzględnie zbieżna.*

2.2 Całka Dirichleta.

Definicja 2.2.1 *Całką Dirichleta nazywamy całkę* $D_n = \int_0^a f(x)\frac{\sin nx}{x}dx$, *gdzie a jest dowolną liczbą dodatnią, a f jest funkcją całkowalną w przedziale* $<0,a>$.

Twierdzenie 2.2.1 (Dirichleta) *Jeżeli funkcja f jest monotoniczna i* f' *jest ciągła w przedziale* $<0,a>$, *to:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a f(x)\frac{\sin nx}{x}dx = \frac{\pi}{2}f(0)$$

Lemat 2.2.2

$$\exists_{M>0}\forall_{h>0}\forall_{n\in\mathbb{N}}\left|\int_0^h \frac{\sin nx}{x}dx\right| \leqslant M$$

Wniosek z lematu:

$$\left|\int_a^b \frac{\sin nx}{x}dx\right| \leqslant 2M$$

Uwaga 2.2.1 *Twierdzenie Dirichleta pozostaje prawdziwe, gdy zastąpić założenie ciągłość* f' *i monotoniczność fprzez założenie słabsze: funkcja f jest przedziałami ciągła wraz z pochodną i przedziałami monotoniczna. Inaczej:* f' *jest ciągła przedziałami i monotoniczna przedziałami.*

Uwaga 2.2.2 (uogólnione twierdzenie Dirichleta) *Jeżeli funkcja f jest przedziałami ciągła wraz z pochodną i monotoniczna, to:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a f(x)\frac{\sin nx}{x}dx = \frac{\pi}{2}f(0+), \textit{gdzie } f(0+) = \lim_{x\to 0+} f(x)$$

Wniosek z uwagi: Jeżeli funkcja f jest, jak poprzednio, przedziałami ciągła wraz z pochodną i przedziałami monotoniczna, to:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx = \frac{\pi}{2}f(0+), \text{dla } 0 < a < \pi$$

2.3 Całkowanie szeregów funkcyjnych.

Twierdzenie 2.3.1 *Jeżeli szereg funkcyjny* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *jest jednostajnie zbieżny w przedziale* $<a,b>$ *do funkcji f i funkcje* f_n *są w tym przedziale całkowalne, to suma f też jest całkowalna i zachodzi wzór:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

2.4 Szeregi Trygonometryczne

Definicja 2.4.1 (szeregu trygonomterycznego) *Szeregiem trygonometrycznym nazywamy szereg funkcyjny postaci:*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,, \ \textit{gdzie } a_n \textit{ i } b_n \textit{ - stałe.}$$

Uwaga 2.4.1 *Jeżeli powyższy szereg jest zbieżny w przedziale $< -\pi, \pi >$ to jest zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i jego suma $f(x)$ jest funkcją okresową o okresie $T = 2\pi$, tzn: $f(x + 2\pi) = f(x)$.*

Definicja 2.4.2 (funkcje ortogonalne) *Mówimy, że dwie funkcje $f(x)$ i $g(x)$ całkowalne w przedziale $< a, b >$ są ortogonalne w tym przedziale, jeżeli:* $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$.

Fakt 2.4.1 *Każde dwie różne funkcje ciągu:*

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

są ortogonalne w przedziale $< -\pi, \pi >$.

Uwaga 2.4.2

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi$$

Twierdzenie 2.4.2 (wzory Eulera-Fouriera) *Jeżeli szereg $\frac{1}{2}a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ jest jednostajnie zbieżny w przedziale $< -\pi, \pi >$ do sumy $f(x)$, to współczynniki a_n i b_n wyrażają się dla $n = 1, 2, \ldots$ wzorami:*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \ \text{ i } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

$$\left(a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right)$$

Uwaga 2.4.3 *Liczby a_n i b_n określone powyższymi wzorami nazywamy **współczynnikami Fouriera** funkcji $f(x)$.*

2.5 Szeregi Fouriera

Niech $f(x)$ będzie funkcją całkowalną w przedziale $< -\pi, \pi >$. Wówczas można obliczyć współczynniki: $a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$ i $b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$, oraz zbudować szereg trygonometryczny: $\frac{1}{2}a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

Definicja 2.5.1 (szereg Fouriera) *Szereg trygonometryczny o tak dobranych (jak powyżej) współczynnikach nazywamy Szeregiem Fouriera funkcji $f(x)$. Co notujemy:*$f(x) \rightsquigarrow \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

Uwaga 2.5.1 *Z definicji nie wynika, by powyższy szereg musiałby być zbieżny, a jeśli nawet jest zbieżny, to nie znaczy, by jego suma była równa $f(x)$. Inaczej mówiąc, bez dodatkowych założeń co do funkcji f nic nie można powiedzieć na temat zbieżności szeregu Fouriera funkcj $f(x)$.*

Twierdzenie 2.5.1 (podstawowe twierdzenie teorii szeregów Fouriera) *Jeżeli funkcja f jest:*

1. *Okresowa o okresie 2π,*
2. *Przedziałami ciągła wraz z pochodną,*
3. *Przedziałami monotoniczna,*

to Szereg Fouriera funkcji f jest zbieżny punktowo:

1. *w punktach ciągłości f do $f(x)$, tzn:*
$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = f(x),$$
2. *w punktach nieciągłości funkcji f do $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, tzn:*
$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Uwaga 2.5.2 *Powyższe twierdznie można sformuować krócej, w następujący sposób. Szereg Fouriera funkcji okresowej o okresie 2π, przedziałami ciągłej (wraz z pochodną) i przedziałami monotonicznej jest zbieżny w każdym punkcie i ma sumę $\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}$ (co równe się $f(x_0)$ w punktach ciągłości funkcji).*

Twierdzenie 2.5.2 *Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest określona na całej osi liczbowej, okresowa, o okresie 2π i całkowalna w przedziale $< -\pi, \pi >$. Jeżeli $f(x)$ jest funkcją parzystą, to jej Szereg Fouriera jest szeregiem cosinusowym, tj. ma wszystkie współczynniki b_n równe 0. A jeżeli $f(x)$ jest funkcją nieparzystą, to jej Szereg Fouriera jest szeregiem sinusowym, tj. ma wszystkie współczynniki a_n równe 0.*

Twierdzenie 2.5.3 (zasada lokalizacji Riemanna) *Zachowanie się Szeregu Fouriera funkcji f w pewnym punkcie x_0 zależy tylko od wartości funkcji f w dowolnie małym otoczeniu $(x_0 - a, x_0 + a)$ punktu x_0.*

Twierdzenie 2.5.4 (wzór Leibniza)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

Twierdzenie 2.5.5 (wzór Eulera)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2.6 Zbieżność podług średnich arytmetycznych

Niech σ_n oznacza ciąg średnich arytmetycznych ciągu $S_n(x)$.

Twierdzenie 2.6.1 (Fejera) *Szereg Fouriera funkcji $f(x)$ ciągłej w przedziale $< -\pi, \pi >$ i okresowej o okresie 2π jest w tym przedziale jednostajnie zbieżny podług średnich arytmetycznych do funkcji $f(x)$ tzn:*

$$\sigma_n \rightrightarrows f(x)$$

3 Szeregi ortogonalne

Definicja 3.0.1 *Ciąg funkcji $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ określonych i ciągłych w przedziale $<a,b>$ nazywamy układem ortogonalnym, jeżeli:*

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)dx = \begin{cases} 0 & dla\ i \neq k \\ N_k^2 > 0 & dla\ i = k \end{cases}$$

Definicja 3.0.2 (norma funkcji) *Liczba $N_k = \sqrt{\int_a^b \varphi_k^2(x)dx}$ nazywamy normą funkcji φ_k.*

Jeżeli wszystkie $N_k = 1$, to układ nazywamy ortonormalnym.

Uwaga 3.0.1 *Każdy układ ortogonalny można unormować dzieląc funkcję $\varphi_k(x)$ przez stałą N_k. To znaczy: jeżeli układ $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots$ jest ortogonalny, to układ $\frac{\varphi_0}{N_0}, \frac{\varphi_1}{N_1}, \ldots, \frac{\varphi_k}{N_k}, \ldots$ jest układem ortonormalnym.*

Definicja 3.0.3 *Liczby $C_m = C_m(f)$ nazywamy składowymi funkcji $f(x)$ względem układu ortogonalnego $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$.*

Definicja 3.0.4 *Szereg funkcyjny $\sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m\varphi_m(x)$ nazywamy szeregiem ortogonalnym odpowiadającym funkcji $f(x)$ i układowi $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$, co zapisujemy: $f(x) \rightsquigarrow \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m\varphi_m(x)$.*

Twierdzenie 3.0.2 (nierówność Bessela)

$$\sum_{m=0}^{n} C_m^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx \ \ dla\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Wniosek: Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n^2$ jest zbieżny, jeśli f jest całkowalna z kwadratem.

Wniosek z wniosku: Na mocy warunku koniecznego zbieżności szeregów liczbowych mamy: $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$. Wniosek ten pozwala udowodnić poznane już wcześniej twierdzenie Riemanna dla szerszej klasy funkcji (wystarczy założenie, że f jest całkowalna z kwadratem).

Twierdzenie 3.0.3 (Riemanna) *Jeżeli funkcja jest całkowalna z kwadratem w $<-\pi,\pi>$, to*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = 0 = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx.$$

Definicja 3.0.5 *Mówimy, że szereg* $\sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m\varphi_m$ *jest zbieżny średniokwadratowo do funkcji* $f(x)$ *w przedziale* $<a,b>$ *jeżeli:* $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b [f(x)-\sum\limits_{m=0}^{n} C_m\varphi_m(x)]^2dx = 0.$

Twierdzenie 3.0.4 (równość Parsevala) *Szereg* $\sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m\varphi_m$ *jest zbieżny średniokwadratowo do* f *wtedy i tylko wtedy gdy:*

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m^2 = \int_a^b f^2(x)dx$$

Definicja 3.0.6 (układ ortogonalny zupełny) *Układ ortogonalny* $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *nazywamy zupełnym, jeżeli dla każdej funkcji ciągłej* $f(x)$ *w przedziale* $<a,b>$ *jej szereg* $\sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m\varphi_m(x)$ *jest zbieżny średniokwadratowo do* $f(x)$ *(lub równoważnie* $\sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m^2 = \int\limits_a^b f^2(x)dx$*).*

Twierdzenie 3.0.5 *Jeżeli układ ortogonalny* $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *jest zupełny, to każde dwie funkcje ciągłe* f *i* g *mające te same składowe są identyczne (tzn:* $\forall_n C_n(f) = C_n(g) \to f = g$*).*

Uwaga 3.0.2 *Układ ortogonalny zupełny przestaje być zupełny, jeżeli odrzucimy z niego choć jedną funkcję.*