



UNIwersytet Gdański  
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki  
Instytut Matematyki

**Witold Bołt**

nr albumu: 140530

## **Twierdzenie o rozmaitości stabilnej**

Praca magisterska na kierunku:

MATEMATYKA

Promotor:

**dr P. Bartłomiejczyk**

Gdańsk 2009

## **Słowa kluczowe**

dyskretne układy dynamiczne, rozmaitość stabilna, punkty stałe

# Spis treści

<b>Wstęp</b> . . . . .	3
<b>1. Preliminaria</b> . . . . .	9
1.1. Preliminaria z topologii . . . . .	9
1.2. Preliminaria z analizy matematycznej i algebry liniowej . . . . .	9
1.3. Preliminaria z układów dynamicznych . . . . .	11
1.3.1. Punkty stałe, okresowe, rekurencyjne, łańcuchowo-rekurencyjne . . .	11
1.3.2. Sprzężenie topologiczne . . . . .	12
1.3.3. Hiperboliczność . . . . .	12
1.3.4. Podprzestrzenie stabilne odwzorowań liniowych . . . . .	13
1.3.5. Zbiory stabilne . . . . .	15
<b>2. Twierdzenie o rozmaitości stabilnej i niestabilnej</b> . . . . .	21
2.1. Twierdzenie o lokalnej rozmaitości niestabilnej . . . . .	21
2.2. Twierdzenie o lokalnej rozmaitości stabilnej . . . . .	28
2.3. Globalna rozmaitość stabilna i niestabilna . . . . .	28
2.4. Przykłady . . . . .	29
<b>3. Dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a i zbiory hiperboliczne</b> . . . . .	32
3.1. Punkty rekurencyjne i łańcuchowo-rekurencyjne . . . . .	32
3.2. Dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a i stabilność strukturalna . . . . .	33
3.3. Zbiory hiperboliczne . . . . .	35
<b>Bibliografia</b> . . . . .	38
<b>Oświadczenie</b> . . . . .	39

# Wstęp

## Teoria układów dynamicznych – podstawowe pojęcia, rozszerzenia, uogólnienia i wykorzystanie

Niniejsza praca poświęcona jest pewnym aspektom teorii układów dynamicznych, w szczególności badaniom stabilności układów dynamicznych. Głównym zagadnieniem wspomnianej teorii jest modelowanie i badanie procesów zmieniających się w czasie. Od strony teoretycznej sprowadza się to do badania ciągu kolejnych iteracji pewnego określonego odwzorowania lub grupy odwzorowań (mowa wtedy o dyskretnych układach dynamicznych lub układach z czasem dyskretnym) lub do analizy rozwiązań równań różniczkowych (układy modelowane przez równania różniczkowe nazywamy ciągłymi układami dynamicznych). Większość terminów i czysto teoretycznych wyników teorii daje się efektywnie wykorzystywać w naukach empirycznych. Bardzo powszechne jest na przykład badanie układów fizycznych, przyrodniczych, ekonomicznych czy społecznych właśnie za pomocą narzędzi wypracowanych przez teorię układów dynamicznych.

Jednym z podstawowych pojęć w teorii dyskretnych układów dynamicznych są szczególnie klasy punktów, które prezentują charakterystyczne zachowania w czasie – w szczególności mowa tu o punktach stałych i okresowych oraz o dalszych rozszerzeniach tych klas na punkty, które moglibyśmy nazwać „niemal stałe” lub „niemal okresowe”. Punkty stałe możemy kojarzyć z pewnymi stanami równowagi w układzie, punkty okresowe natomiast z cyklicznymi zmianami układu. Bardzo łatwo podać tu konkretne skojarzenia z modelowania chociażby procesów pogodowych, gdzie często mamy do czynienia ze zjawiskami mającymi charakter okresowy.

Powiedzieliśmy, że punkty stałe można kojarzyć ze stanem równowagi układu. Naturalnie rodzą się więc dalsze pytania. Po pierwsze jak doprowadzić układ do takiego stanu równowagi (co może być istotne na przykład w modelach ekonomicznych czy finansowych) lub odwrotnie – jak wyprowadzić układ z takiego stanu oraz szerzej – jak zaburzenia wprowadzane do układu wpłyną na zachowanie lub zmianę stanu. Na tego typu pytania staramy się odpowiadać przy pomocy pojęć stabilności i niestabilności określonych stanów układu. Sama teoria stabilności jest bardzo bogata i wyróżnia wiele różnych klasyfikacji tego jak dany układ jest stabilny (bądź niestabilny). Dochodzą do tego dalej zagadnienia z teorii sterowania, która stara się badać na ile możliwe jest doprowadzanie danego układu dynamicznego do oczekiwanego stanu i co należy zapewnić aby takie „sterowanie” było możliwe.

W ostatnich dziesięcioleciach, dzięki rozwojowi metod numerycznych i większej do-

stępności technologii pozwalającej wizualizować modele matematyczne bardzo silnie rozwinęły się kolejne ważne zagadnienia w ramach teorii układów dynamicznych. W szczególności analiza pewnych układów zaczęła zdradzać ich silną czułość na ewentualne zaburzenia narzuconych warunków początkowych. Zastosowanie komputerów do aproksymacji rozwiązań pewnych równań różniczkowych oraz zwyczajne lenistwo człowieka, który przepisał o kilka miejsc po przecinku za mało, co spowodowało wyznaczenie zupełnie innego rozwiązania niż spodziewane<sup>1</sup> doprowadziło do odkrycia niezwykle ciekawej własności – czułej wrażliwości na warunki początkowe. Dalsza analiza podobnych systemów i badania nad ich właściwościami przyczyniły się do sformułowania teorii nazywanej dzisiaj teorią chaosu. Daje ona narzędzie do badania układów dynamicznych, które przejawiają bardzo skomplikowane zachowania (choć często samo ich sformułowanie jest proste). Wbrew potocznemu znaczeniu słowa chaos pokazuje ona jednak zaskakujące oblicza porządku i ładu, które w takich systemach możemy odnaleźć<sup>2</sup>. Dalsze badania (nie tylko matematyczne) nad bardzo skomplikowanymi układami doprowadziły dalej do wyróżnienia (choć nie do końca formalnego) specjalnej klasy układów złożonych, które zdają się być jeszcze trudniejsze w analizie niż układy chaotyczne.

Równolegle rozwijane i rozbudowane teorie z zakresu probabilistyki i statystyki doprowadziły w pewnym momencie do spotkania teorii układów dynamicznych i procesów stochastycznych w ramach powstającej od niedawna teorii stochastycznych układów dynamicznych, gdzie skomplikowane wielowymiarowe układy próbujemy opisywać nie tylko w terminach geometrii ale również prawdopodobieństwa i tzw. szumu (ang. *noise*).

Jak pokazuje historia, ściśle matematyczna teoria oparta początkowo na podstawowych pojęciach algebry i analizy matematycznej została z sukcesem rozbudowana i zaaplikowana w bardzo wielu dziedzinach nauki i wpłynęła na rozwój innych teorii matematycznych. Niezależnie jednak od wielkiej skali i zakresu tej teorii oraz liczbie jej aplikacji i modyfikacji, jej piękno leży wciąż w tych podstawach, które są relatywnie proste do sformułowania i często bardzo intuicyjne.

## Struktura pracy i przyjęte założenia

Należy wyraźnie zaznaczyć na wstępie, że w dalszej części pracy po pierwsze koncentrujemy się jedynie na teoretycznych aspektach układów dynamicznych i zakładamy, że

---

<sup>1</sup>Mowa tu o słynnym przypadku Edwarda Lorenza, który zajmował się modelowaniem procesów pogodowych w latach '60 XX wieku i odkrył „przypadkiem” coś co zostało później nazwane atraktorem Lorenza lub efektem motyla.

<sup>2</sup>Jednym z przykładów takiego „fenomenu” może być zjawisko opisane przez główne twierdzenie niniejszej pracy. Oto okazuje się, że nawet w bardzo skomplikowanej dynamice pojawienie się choć jednego szczególnego punktu stałego lub okresowego może pociągać za sobą, bardzo „uporządkowane” zachowania układu na pewnych podzbiorach dziedziny.

ewentualne (ciekawe) zastosowania praktyczne są możliwe i są przedmiotem odrębnych badań. Po drugie skupiamy się tylko na układach dynamicznych dyskretnych – czyli analizujemy ciągi iteracji ustalonych funkcji (z reguły homeomorfizmów lub dyfeomorfizmów). W dodatku dla zwiększenia czytelności w większości przypadków skupiamy swoją uwagę na odwzorowaniach określonych na płaszczyźnie (lub jej podzbiorach).

Omówimy teraz pokrótce strukturę całej pracy i nakreślimy główną myśl prowadzonych rozważań.

## **Preliminaria**

Pierwsza część pracy stanowi swoiste wprowadzenie w tematykę teorii układów dynamicznych. Znalazły się tam najważniejsze pojęcia podstawowe potrzebne do zrozumienia dalszych rozdziałów. W szczególności znajdziemy tu definicje i klasyfikację punktów stałych i okresowych, bardzo ważną definicję hiperboliczności oraz definicje i opis własności zbiorów stabilnych i niestabilnych. Zamieszczono tam również przykłady analizy zbiorów stabilnych dla konkretnych odwzorowań wraz z wynikami symulacji komputerowych, które rzucają nieco światła na skomplikowaną (i w pewnym sensie wciąż niedostępną pełnemu zrozumieniu) geometrię tych zbiorów.

Dołożono starań aby rozdział pierwszy zawierał możliwie dużo szczegółów potrzebnych do zrozumienia kolejnych części tekstu. Siłą rzeczy nie da się jednak zmieścić w jednym rozdziale całej teorii podstawowej wraz ze wszystkimi detalami. Bardziej szczegółowe omówienie tematyki można znaleźć w podręcznikach: [1], [6] i [17].

Pod koniec pierwszego rozdziału dowodzimy też relatywnie proste fakty z algebry liniowej, które jak się okazuje, stanowią liniową wersję głównego, tytułowego twierdzenia tej pracy. Wyniki te pozwalają dekomponować przestrzeń liniową, nad którą zostało zdefiniowane odwzorowanie liniowe, na podprzestrzeń (liniowe!) stabilną i niestabilną, na których odpowiednio punkty oddalają się lub zbliżają do zera wraz z iterowaniem odwzorowania. Dokładna analiza przypadku liniowego jest bardzo istotna z dwóch powodów. Po pierwsze przeprowadzone dowody są bardzo elementarne – nie korzystają z żadnej zaawansowanej teorii, a dają dość istotny wynik. Po drugie otrzymane wyniki motywują poszukiwanie podobnych zachowań w świecie odwzorowań nieliniowych. Motywacja ta daje podwaliny pod następny, główny rozdział pracy.

## **Twierdzenie o rozmaitości stabilnej**

Tytułowe twierdzenie o rozmaitości stabilnej (a właściwie twierdzenia o rozmaitości stabilnej i niestabilnej) stanowi główną treść rozdziału drugiego. Rozdział ten jest najważniejszym rozdziałem pracy i zawiera kompletny dowód twierdzenia o lokalnej rozmaitości

niestabilnej oraz komentarze na temat twierdzenia o lokalnej rozmaitości stabilnej i rozmaitościach globalnych.

Tak jak wspomniano celem jest udowodnienie uogólnionych twierdzeń z rozdziału pierwszego. Okazuje się, że aby to osiągnąć musimy zastosować spojrzenie lokalne – analizujemy otoczenia punktów stałych (lub okresowych) a nie tak jak miało to miejsce wcześniej całą przestrzeń (pod koniec rozdziału wspominamy nieco o również o globalnej wersji twierdzenia, jednak nie jest to główny przedmiot rozważań w tej pracy). W tych otwartych otoczeniach będziemy poszukiwać takich zbiorów (które okazują się rozmaitościami odpowiedniego wymiaru – zgodnego z wymiarem podprzestrzeni stabilnych i niestabilnych z przypadku liniowego, czyli w naszym przypadku na płaszczyźnie analizowane zbiory są krzywymi) na których zachowanie będzie analogiczne do przypadku liniowego. Dowód ma charakter egzystencjonalny i w dużej mierze bazuje na twierdzeniu Banacha o punkcie stałym zastosowanym do pewnej przestrzeni krzywych spełniających określone warunki (warunki owe wynikają z samej treści twierdzenia – chodzi np. o to aby krzywa taka przechodziła przez rozważany punkt stały i aby jej pochodna była odpowiednio ograniczona).

Prezentowany tu dowód twierdzenia o rozmaitości niestabilnej jest lekko zmodyfikowaną i dodatkowo skomentowaną wersją dowodu z książki [1]. Ta sama technika może być stosowana w dowodzeniu twierdzenia dla odwzorowań określonych na przestrzeniach o wyższych wymiarach. Ponieważ twierdzenie ma charakter lokalny można je również łatwo uogólnić na przypadek odwzorowań określonych na rozmaitościach.

Twierdzenie o rozmaitości stabilnej jest na tyle cennym i ważnym wynikiem, iż doczekał się zarówno wielu różnych wersji dowodu jak i wielu uogólnień. W szczególności w klasycznej książce [16] udowodniono twierdzenie pod nazwą „twierdzenie Hadamarda-Perrona”, które jest wersją opisywanego przez nas twierdzenia dla dyfeomorfizmów określonych na dowolnych rozmaitościach (technika dowodu jest jednak istotnie różna od prezentowanej w niniejszej pracy). W książce [14] można natomiast znaleźć dowód twierdzenia dla odwzorowań określonych na dowolnej przestrzeni Banacha. W artykule [7] zaprezentowano nowe podejście do problemu w przypadku rozmaitości dwuwymiarowych (dowód tam prezentowany ma charakter ściśle geometryczny i bazuje na zbieżności ciągów tak zwanych stabilnych podrozmaitości czasu skończonego<sup>3</sup>, które prezentują własności stabilne dla skończonej liczby iteracji).

W książce [6] można znaleźć dowód twierdzenia dla ciągłych układów dynamicznych. Tam rolę punktu stałego pełni stałe rozwiązanie równania różniczkowego. Przedmiotem badań staje się więc analiza zachowań rozwiązań bliskich ustalonemu rozwiązaniu stałemu – analizujemy więc podprzestrzenie funkcyjne.

---

<sup>3</sup>ang. *finite-time stable manifolds*.

Dalsze komentarze i uogólnienia twierdzenia można również znaleźć w książkach [13], [4], [2]. W książce [5] poza samym dowodem zebrano cenne uwagi historyczne odnośnie różnych technik dowodzenia tego twierdzenia.

Tak jak wspominaliśmy wcześniej – jednym z rozwinięć teorii układów dynamicznych są tzw. stochastyczne układy dynamiczne. Istnieje również specjalna wersja twierdzenia o rozmaitości stabilnej dla tych układów. Można o niej przeczytać na przykład w serii artykułów: [9], [10], [11].

## **Dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a i zbiory hiperboliczne**

Trzeci rozdział pracy ma charakter referatu na temat możliwych uogólnień pojęć i twierdzeń prezentowanych w pierwszych dwóch rozdziałach. Tematy tam prezentowane potraktowano opisowo – większość twierdzeń zacytowano bez dowodów, które w tych przypadkach bywają bardzo skomplikowane technicznie i wykraczają poza zakres pracy magisterskiej. Zamiast tego sens wprowadzonych pojęć opatrzone stosownym komentarzem i uwagami.

W pierwszej części rozdziału zajmujemy się nowymi klasami punktów, a więc punktami rekurencyjnym i łańcuchowo-rekurencyjnymi, które stanowią kolejne uogólnienia klasy punktów okresowych. Badania własności takich punktów mają wielkie znaczenie praktyczne z racji tego, że właśnie takie punkty dają się (dużo wygodniej niż punkty okresowe) badać w ramach analizy numerycznej. Wprowadzenie definicji tych punktów jest też niejako wstępem do następnej części rozdziału poświęconej dyfeomorfizmom Morse'a-Smale'a. Dyfeomorfizmy te, to odwzorowania o szczególnej postaci punktów łańcuchowo-rekurencyjnych i szczególnej postaci rozmaitości stabilnych. Jedną z ich ciekawszych własności (na odpowiednich przestrzeniach) jest własność stabilności strukturalnej.

Układ, który jest stabilny strukturalnie, to taki układ, który przy niewielkich zaburzeniach<sup>4</sup> samego układu, posiada dokładnie te same własności dynamiczne. Jest to kolejna bardzo pożądana własność z uwagi na symulacje numeryczne i wszelkie zastosowania empiryczne, gdzie prowadzone pomiary i obserwacje zawsze obarczone są pewnym błędem.

W ostatniej części rozdziału mówimy natomiast o zbiorach hiperbolicznych, które uogólniają pojęcia punktów hiperbolicznych znanych z rozdziału pierwszego pracy. Pojęcie to pozwala podać bardzo ogólną wersję twierdzenia o rozmaitości stabilnej i niestabilnej właśnie dla tych zbiorów, których elementami nie muszą być już tylko punkty stałe lub okresowe. Okazuje się więc, że bardzo ciekawa własność szczególnego porządku w okolicach punktów stałych, pojawia się również w wielu innych przypadkach punktów o specyficznych własnościach.

Na samym końcu rozdziału trzeciego wspominamy jeszcze o ogólniejszej niż dyfe-

---

<sup>4</sup>Przez zaburzenie układu rozumiemy niewielką modyfikację funkcji opisującej układ.

omorfizmy Morse'a-Smale'a klasie odwzorowań, a mianowicie o dyfeomorfizmach spełniających Aksjomat A (definicja tych odwzorowań wywodzi się również od Smale'a). Są to odwzorowania, których zbiory punktów łańcuchowo-rekurencyjnych są jednocześnie hiperboliczne. Odwzorowania i układy dynamiczne z tej rodziny są obecnie tematem wielu badań.

## ROZDZIAŁ 1

# Preliminaria

Informacje przygotowawcze zebrane w tym rozdziale zostały opracowane na bazie podręczników: [8], [15], [3], [12] i [1]. Przyjmuje się, że symbol wytłuszczonego zera:  $\mathbf{0}$  oznacza początek układu współrzędnych przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$  zależnego od kontekstu. Symbol  $\mathbb{R}^n$  rozumiemy jako przestrzeń unormowaną, z normą euklidesową. Normę wektora  $x \in \mathbb{R}^n$  oznaczamy przez  $|x|$ .

### 1.1. Preliminaria z topologii

**Definicja 1.1** (odwzorowanie zwężające). Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną oraz  $F: X \rightarrow X$  pewnym odwzorowaniem. Mówimy, że  $F$  jest zwężające, jeśli istnieje stała  $c < 1$  taka, że

$$d(F(x), F(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

dla dowolnych  $x, y \in X$ .

**Definicja 1.2** (przestrzeń zupełna). Przestrzeń metryczna  $X$  jest zupełna, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego zawarty w tej przestrzeni jest w niej zbieżny.

**Przykład 1.3.** Przestrzeń  $\mathbb{R}^n$  jest przestrzenią zupełną.

**Twierdzenie 1.4** (Banacha o punkcie stałym). Niech  $X$  przestrzeń zupełna oraz  $F: X \rightarrow X$  odwzorowanie zwężające. Istnieje wtedy dokładnie jeden punkt  $x_0 \in X$  taki, że

$$F(x_0) = x_0.$$

Co więcej dla dowolnego  $x \in X$  mamy  $F^n(x) \rightarrow x_0$  przy  $n \rightarrow \infty$ .

**Definicja 1.5** (zbiór zwarty). Niech  $X$  przestrzeń metryczna. Zbiór  $U \subset X$  nazywamy zwartym wtedy i tylko wtedy, gdy z dowolnego ciągu zwaratego w  $U$  można wybrać podciąg zbieżny w zbiorze  $U$ .

### 1.2. Preliminaria z analizy matematycznej i algebry liniowej

**Definicja 1.6** (krzywa i jej obraz). Dowolną funkcję ciągłą  $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  nazywamy krzywą w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ . Zbiór  $c^* = c([a, b]) = \{x \in \mathbb{R}^n : c(t) = x \text{ dla pewnego } t \in [a, b]\}$  nazywamy obrazem krzywej  $c$ .

W literaturze często spotyka się również utożsamienie pojęcia krzywej z tym co my nazywamy tu obrazem krzywej. Samą funkcję, którą my nazywamy krzywą, nazywa się wówczas parametryzacją krzywej.

**Definicja 1.7** (krzywa regularna). Krzywą  $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  klasy  $C^m$ , gdzie  $m > 0$  nazywamy regularną jeśli  $c'(t) \neq \mathbf{0}$  dla  $t \in (a, b)$ .

**Twierdzenie 1.8** (Lagrange'a o wartości średniej). Niech  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą w przedziale  $[a, b]$  i różniczkowalną w  $(a, b)$ . Wtedy istnieje  $c \in (a, b)$  takie, że:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(c).$$

**Wniosek 1.9.** Niech  $l: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dowolna krzywa klasy  $C^1$  łącząca punkty postaci  $(x_0, y)$ ,  $(x_1, y)$ . Wtedy istnieje punkt na krzywej  $l$  w którym wektor styczny jest postaci  $(\alpha, 0)$ .

*Dowód.* Niech  $l = (l_1, l_2)$ , gdzie  $l_i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Stosujemy twierdzenie Lagrange'a do funkcji  $l_2$  i otrzymujemy  $t \in (0, 1)$  takie, że  $l_2'(t) = 0$ . Stąd  $l'(t) = (\alpha, 0)$ .  $\square$

**Wniosek 1.10.** Niech  $l: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  będzie pewną krzywą klasy  $C^1$ , która łączy punkty  $(x_0, y_0)$  i  $(x'_0, y'_0)$  takie, że  $|y'_0 - y_0| > \frac{1}{2}|x'_0 - x_0|$ . Wtedy istnieje punkt na krzywej  $l$  w którym wektor styczny ma nachylenie większe niż  $\frac{1}{2}$ .

*Dowód.* Przypadek ten można sprowadzić do tego z poprzedniego wniosku, przez odpowiedni obrót układu współrzędnych, tak aby  $y_0 = y'_0$ . W otrzymanym w ten sposób punkcie nachylenie w starym układzie współrzędnych jest równe dokładnie  $\frac{|y'_0 - y_0|}{x'_0 - x_0}$ , czyli z założenia jest większe niż  $\frac{1}{2}$ .  $\square$

Poniższe elementarne fakty z algebry liniowej będą często wykorzystywane w dowodach prezentowanych dalej. Zostały one zaczerpnięte z książki [1]. Więcej szczegółów i dowody można znaleźć również w [12].

**Fakt 1.11.** Niech  $A$  będzie macierzą rzeczywistą  $3 \times 3$ . Wtedy istnieje odwracalna macierz rzeczywista  $G$  taka, że  $G^{-1}AG$  jest w jednej z postaci:

$$i) \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad ii) \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}, \quad iii) \begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad iv) \begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon & 0 \\ 0 & \lambda & \varepsilon \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

gdzie  $\beta, \varepsilon \neq 0$ .

**Wniosek 1.12.** Niech  $A$  będzie macierzą rzeczywistą  $2 \times 2$ . Wtedy istnieje odwracalna macierz rzeczywista  $G$  taka, że  $G^{-1}AG$  jest w jednej z postaci:

i) 
$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix},$$

ii) 
$$\begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

iii) 
$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix},$$

gdzie  $\beta, \varepsilon \neq 0$ .

**Fakt 1.13.** Niech  $A$  będzie macierzą rzeczywistą postaci:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Wtedy dla dowolnego  $\varepsilon \neq 0$  istnieje macierz nieosobliwa  $S$  taka, że:

$$S \circ A \circ S^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon & 0 \\ 0 & \lambda & \varepsilon \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Szkic dowodu. Ustalmy  $\varepsilon \neq 0$ . Za macierz  $S$  wystarczy przyjąć:

$$S = \begin{bmatrix} \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

## 1.3. Preliminaria z układów dynamicznych

### 1.3.1. Punkty stałe, okresowe, rekurencyjne, łańcuchowo-rekurencyjne

Jak wspomniano już we wstępie, jednym z zasadniczych problemów w teorii układów dynamicznych są badania dotyczące punktów stałych i okresowych odwzorowań opisujących układ. Zaczniemy więc od dwóch podstawowych definicji tych klas punktów.

**Definicja 1.14** (punkt stały). Niech  $F: U \rightarrow V$ , gdzie  $U, V$  dowolne zbiory. Każdy element  $p \in U \cap V$  taki, że  $F(p) = p$  nazywamy punktem stałym odwzorowania  $F$ .

**Definicja 1.15** (punkt okresowy i orbita okresowa). Niech  $F: U \rightarrow V$ , gdzie  $U, V$  dowolne zbiory. Każdy punkt  $p \in U \cap V$  taki, że w ciągu  $p_0 := p, p_{n+1} = F(p_n)$  dla pewnego  $n > 0$  mamy  $p_n = p$ , nazywamy punktem okresowym odwzorowania  $F$ . Najmniejszą liczbę  $n > 0$  taką, że  $p_n = p$  nazywamy okresem punktu  $p$ . Zbiór  $\{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$  nazywamy orbitą okresową punktu  $p$ .

**Uwaga 1.16.** Zauważmy, że każdy punkt stały jest też punktem okresowym o okresie równym 1.

W dalszej części tego rozdziału oraz w rozdziale drugim skupimy się na zagadnieniach dotyczących punktów stałych. Większość wyników (jeśli nie wszystkie) można dość prosto uogólnić na przypadek punktów okresowych. W rozdziale trzecim natomiast podamy definicje i kilka własności dwóch kolejnych klas punktów – punktów rekurencyjnych i łańcuchowo-rekurencyjnych, które stanowią kolejne uogólnienia klas prezentowanych tutaj.

### 1.3.2. Sprzężenie topologiczne

Ważnym narzędziem w badaniu układów dynamicznych jest sprzężenie topologiczne<sup>1</sup>. Poniżej prezentujemy bardzo ogólną wersję definicji. W dalszych częściach pracy będziemy korzystać z tego pojęcia jedynie w kontekście odwzorowań zdefiniowanych na przestrzeniach  $\mathbb{R}^n$ .

**Definicja 1.17** (sprzężenie topologiczne). Niech  $X, Y$  pewne przestrzenie topologiczne oraz  $F: X \rightarrow X, G: Y \rightarrow Y$  dowolne odwzorowania. Mówimy, że  $F$  jest topologicznie sprzężone z  $G$  jeśli istnieje homeomorfizm  $h: Y \rightarrow X$  taki, że  $F \circ h = h \circ G$ . Piszemy wtedy w skrócie  $F \sim_h G$  lub po prostu  $F \sim G$ .

**Uwaga 1.18.** Oczywiście sprzężenie topologiczne jest relacją równoważności.

Okazuje się, że odwzorowania, które są topologicznie sprzężone, są „identyczne” w sensie dynamiki. W szczególności zarówno punkty stałe jak i punkty okresowe  $G$  są przekształcane przez  $h$  odpowiednio na punkty stałe i okresowe  $F$ .

### 1.3.3. Hiperboliczność

Pojęcie hiperboliczności jest jednym z centralnych pojęć tej pracy. Dalsze rozważania będziemy ograniczać tylko do tak zwanych hiperbolicznych punktów stałych. Okazuje się, że przy założeniu hiperboliczności można bardzo wiele powiedzieć o specyficznych geometrycznych własnościach odwzorowań.

**Definicja 1.19** (hiperboliczne odwzorowanie liniowe). Odwracalne odwzorowanie liniowe nazywamy hiperbolicznym, jeśli nie ma ono wartości własnych o module równym 1.

**Definicja 1.20** (hiperboliczny punkt stały). Niech  $V$  otwarte otoczenie punktu  $p \in \mathbb{R}^n$  oraz  $F: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  dyfeomorfizm odwzorowujący otoczenie  $V$  na jego obraz. Punkt  $p$  nazywamy hiperbolicznym punktem stałym odwzorowania  $F$  jeśli  $F(p) = p$  oraz  $DF(p)$  jest hiperbolicznym odwzorowaniem liniowym

**Uwaga 1.21.** Pojęcie hiperboliczności daje się rozszerzyć na inne klasy punktów. Na przykład bardzo łatwo podać definicję hiperbolicznego punktu okresowego (lub raczej hiperbolicznej orbity okresowej). Okazuje się bowiem, że jeśli  $p$  jest punktem okresowym oraz

---

<sup>1</sup>Czasem spotyka się również termin *topologiczna równoważność*.

$DF(p)$  jest hiperbolicznym odwzorowaniem liniowym, to również różniczka kolejnych iteracji jest odwzorowaniem hiperbolicznym. Tak jak już wspomniano wcześniej, wraz z pojęciem hiperboliczności, da się uogólnić również prezentowane tu wyniki na szersze klasy punktów.

Wyróżniać będziemy trzy rodzaje hiperbolicznych punktów stałych: punkty przyciągające, odpychające i siodłowe. Mimo, iż definicję tych klas punktów będą czysto analityczne (odwołujące się do własności pochodnej) pokażemy, że użyte nazwy trafnie oddają lokalną dynamikę odwzorowania w otoczeniu tych punktów.

I tak oto wszystkie punkty z otoczenia punktu przyciągającego będą, wraz z iterowaniem odwzorowania, przyciągane do punktu stałego. Analogicznie, w przypadku punktu odpychającego, jego otoczenie będzie odpychane przy iterowaniu odwzorowania. Punkty siodłowe będą natomiast sytuacją „pośrednią”, która ostatecznie okaże się dla nas najbardziej interesująca.

**Definicja 1.22.** Niech  $p \in \mathbb{R}^n$  będzie hiperbolicznym punktem stałym odwzorowania różniczkiowalnego  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Mówimy, że punkt  $p$  jest:

- *przyciągającym* punktem stałym (zlewem, ściekiem), jeśli wszystkie wartości własne  $DF(p)$  są co do modułu mniejsze od 1,
- *odpychającym* punktem stałym (źródłem), jeśli wszystkie wartości własne  $DF(p)$  są co do modułu większe od 1,
- punktem *siodłowym* (siodłem) w pozostałych przypadkach, to znaczy, gdy istnieje przynajmniej jedna wartość własna  $DF(p)$ , która jest większa co do modułu od 1 oraz przynajmniej jedna, która jest mniejsza od 1.

### 1.3.4. Podprzestrzenie stabilne odwzorowań liniowych

W tym punkcie pokrótce przeanalizujemy zachowanie odwzorowań liniowych w sytuacji, gdy zero jest hiperbolicznym punktem stałym. Poniższe dwa twierdzenia rozwiązują problem w przypadku punktu odpychającego i przyciągającego.

**Twierdzenie 1.23.** Niech  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie odwzorowaniem liniowym. Jeśli wszystkie wartości własne odwzorowania  $L$  są mniejsze co do modułu od 1, to  $L^n(x) \rightarrow \mathbf{0}$  przy  $n \rightarrow \infty$  dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}^n$ .

*Dowód.* Udowodnimy twierdzenie w przypadku odwzorowań określonych na  $\mathbb{R}^3$  i wykorzystamy do tego twierdzenie Banacha o punkcie stałym (twierdzenie 1.4). Sprawdzimy, że  $L$  jest odwzorowaniem zwężającym, to znaczy, że istnieje  $\nu < 1$  takie, że  $|L(x)| \leq \nu|x|$ . Korzystamy z faktu 1.11. Rozważymy tylko przypadek gdy macierz odwzorowania  $L$  można

sprowadzić do postaci *iv*) z tego faktu. Pozostałe przypadki można wyliczyć analogicznie. Dla ustalonego  $x \in \mathbb{R}^3$  mamy:

$$\begin{aligned} |L(x)|^2 &= \lambda^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \varepsilon^2(x_2^2 + x_3^2) + 2\lambda\varepsilon(x_1x_2 + x_2x_3) \\ &\leq (\lambda^2 + \varepsilon^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2|\lambda\varepsilon|(|x_1x_2| + |x_2x_3| + |x_1x_3|) \\ &\leq (\lambda^2 + \varepsilon^2 + 4|\lambda\varepsilon|)|x|^2. \end{aligned}$$

Korzystamy przy tym z nierówności  $|xy| \leq x^2 + y^2$ . Przyjmujemy  $\nu = \sqrt{\lambda^2 + 4|\lambda\varepsilon| + \varepsilon^2}$ . Ponieważ  $\lambda$  jest wartością własną macierzy odwzorowania  $L$ , jest z założenia mniejsza co do modułu niż 1. Co więcej wiadomo (por fakt 1.13), że  $\varepsilon$  może być dowolnie małe. W szczególności może być takie, że  $\nu < 1$ .

Z twierdzenia 1.4 mamy więc, że dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}^3$  zachodzi  $L^n(x) \rightarrow \mathbf{0}$  przy  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Twierdzenie 1.24.** *Niech  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie odwracalnym odwzorowaniem liniowym. Jeśli wszystkie wartości własne odwzorowania  $L$  są większe co do modułu od 1, to  $L^n(x) \rightarrow \mathbf{0}$  przy  $n \rightarrow -\infty$  dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}^n$ .*

*Dowód.* Twierdzenie jest wnioskiem z poprzedniego twierdzenia. Rozważmy bowiem odwzorowanie  $L^{-1}$ . W oczywisty sposób wszystkie wartości własne  $L^{-1}$  mają z założenia moduł mniejszy od 1 a co za tym idzie, dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}^n$  mamy  $(L^{-1})^n(x) \rightarrow \mathbf{0}$  przy  $n \rightarrow \infty$ . Czyli dokładnie  $L^n(x) \rightarrow \mathbf{0}$  przy  $n \rightarrow -\infty$ .  $\square$

Aby uprościć sformułowanie twierdzenia w przypadku punktu siodłowego ograniczmy się do konkretnego przypadku w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ .

**Twierdzenie 1.25.** *Założmy, że  $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  jest odwracalnym odwzorowaniem liniowym, a liczby  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  są wszystkimi jego wartościami własnymi. Niech  $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1, |\lambda_3| > 1$ . Wtedy istnieje płaszczyzna  $W^s$  oraz prosta  $W^u$  takie, że:*

1. jeśli  $x \in W^s$ , to  $L(x) \in W^s$  oraz  $L^n(x) \rightarrow \mathbf{0}$  przy  $n \rightarrow \infty$ ,
2. jeśli  $x \in W^u$ , to  $L(x) \in W^u$  oraz  $L^n(x) \rightarrow \mathbf{0}$  przy  $n \rightarrow -\infty$ ,
3. jeśli  $x \notin W^s \cup W^u$ , to  $|L^n(x)| \rightarrow \infty$  przy  $n \rightarrow \pm\infty$ .

*Szkic dowodu.* Dla uproszczenia założmy, że odwzorowanie  $L$  ma trzy różne, rzeczywiste wartości własne<sup>2</sup>. Istnieją wtedy liniowo niezależne wektory  $v_1, v_2, v_3$  spełniające  $Lv_i = \lambda_i v_i$ . Przyjmijmy  $W^s = \{\alpha v_1 + \beta v_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$  oraz  $W^u = \{\gamma v_3 : \gamma \in \mathbb{R}\}$ . W oczywisty sposób spełniony jest punkt 1, jeśli bowiem  $x \in W^s$ , to:

$$|L^n x| = |L^n(\alpha v_1 + \beta v_2)| = |\alpha \lambda_1^n v_1 + \beta \lambda_2^n v_2| \rightarrow 0,$$

<sup>2</sup>Ogólny przypadek można udowodnić podobnie, korzystając z faktu 1.11.

bo  $|\lambda_1| < 1$  i  $|\lambda_2| < 1$ . Punkt 2 można udowodnić podobnie do twierdzenia poprzedniego - rozważając odwrotność odwzorowania  $L$  na przestrzeni  $W^u$ . Załóżmy teraz, że  $x \notin W^s \cup W^u$ . Wtedy istnieją stałe  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  takie, że  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ ,  $\gamma \neq 0$  oraz  $x = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$  i mamy:

$$\begin{aligned} |L^n x| &= |L^n(\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3)| = |\alpha \lambda_1^n v_1 + \beta \lambda_2^n v_2 + \gamma \lambda_3^n v_3| = \\ &= |\lambda_3^n| \cdot \left| \alpha \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^n v_1 + \beta \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^n v_2 + \gamma v_3 \right| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

□

**Uwaga 1.26.** 1. Oczywiście podobne twierdzenia można formułować również dla innych przypadków - gdy na przykład tylko jedna z wartości własnych ma moduł mniejszy niż jeden.

2. Jeśli  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest odwzorowaniem liniowym, którego niektóre wartości własne są co do modułu mniejsze od 1 a pozostałe są większe od 1, również istnieją zbiory  $W^s$  i  $W^u$ , które są pewnymi podprzestrzeniami liniowymi  $\mathbb{R}^n$ . Wymiary tych przestrzeni są równe odpowiednio liczbie wartości własnych o module mniejszym i większym od jedności.

Po udowodnieniu powyższych twierdzeń sens podanej niżej definicji jest oczywisty. Wspominane w treściach twierdzeń zbiory  $W^s$  i  $W^u$  nazywać będziemy podprzestrzeniami stabilną i niestabilną.

**Definicja 1.27** (podprzestrzeń stabilna i niestabilna). Niech  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie odwzorowaniem liniowym. Zbiory  $W^u$  i  $W^s$  spełniające warunki:

1. jeśli  $x \in W^s$ , to  $L(x) \in W^s$  oraz  $L^n(x) \rightarrow \mathbf{0}$  przy  $n \rightarrow \infty$ ;
2. jeśli  $x \in W^u$ , to  $L(x) \in W^u$  oraz  $L^n(x) \rightarrow \mathbf{0}$  przy  $n \rightarrow -\infty$ ;
3. jeśli  $x \notin W^s \cup W^u$ , to  $|L^n(x)| \rightarrow \infty$  przy  $n \rightarrow \pm\infty$ ;

nazywamy odpowiednio podprzestrzenią *niestabilną* i *stabilną* odwzorowania  $L$ .

### 1.3.5. Zbiory stabilne

W tym punkcie uogólnimy pojęcia podprzestrzeni stabilnych i niestabilnych na przypadek dowolnych odwzorowań klasy  $C^r$ . Oczywiście, gdy rozważamy dowolne odwzorowania różniczkowalne, to zbiory o których będziemy mówić z reguły nie będą podprzestrzeniami liniowymi. Ich własności i znaczenie będą jednak analogiczne jak w przypadku liniowym.

**Definicja 1.28** (lokalny i globalny zbiór stabilny). Niech  $p \in \mathbb{R}^n$  oraz  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Największy (w sensie relacji zawierania) zbiór  $W^s(F, p)$ , taki, że dla dowolnego  $x \in W^s(F, p)$  zachodzi  $F^n(x) \rightarrow p$  przy  $n \rightarrow \infty$  nazywamy globalnym zbiorem stabilnym odwzorowania  $F$  w punkcie  $p$ .

Niech  $U$  będzie otwartym otoczeniem punktu  $p$ . Podzbiór zbioru  $U$  składających się z takich punktów  $x$ , że  $F^n(x) \in U$  dla dowolnego  $n \geq 0$  oraz  $F^n(x) \rightarrow p$  przy  $n \rightarrow \infty$  nazywamy lokalnym zbiorem stabilnym odwzorowania  $F$  w punkcie  $p$  i otoczeniu  $U$  i oznaczamy  $W_{loc}^s(F, p, U)$ .

**Uwaga 1.29.** W oczywisty sposób, dla dowolnego punktu stałego  $p$ , globalny zbiór stabilny  $W^s(F, p)$  oraz dowolny lokalny zbiór stabilny  $W_{loc}^s(F, p, U)$  są niepuste. Zawierają bowiem punkt  $p$ .

Korzystając z definicji zbiorów stabilnych, możemy sformułować definicję zbiorów niestabilnych.

**Definicja 1.30** (lokalny i globalny zbiór niestabilny). Niech  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie homeomorfizmem oraz  $U$  będzie pewnym otwartym otoczeniem  $p$ . Wtedy zbiór  $W^u(F, p) := W^s(F^{-1}, p)$  nazywamy globalnym zbiorem niestabilnym odwzorowania  $F$  w punkcie  $p$ , natomiast zbiór  $W_{loc}^u(F, p, U) := W_{loc}^s(F^{-1}, p, U)$  lokalnym zbiorem niestabilnym odwzorowania  $F$  w punkcie  $p$  i otoczeniu  $U$ .

**Uwaga 1.31.** Definicję zbioru niestabilnego można rozszerzyć na przypadek odwzorowań, które nie są odwracalne. W tym celu można na przykład posłużyć się pojęciem *historii punktu*  $p$ . Otóż historią punktu  $p$  nazywamy dowolny zbiór  $\{p_{-n} : n \in \mathbb{N}\}$  taki, że  $F(p_{n-1}) = p_n$  oraz  $p_0 = p$ . Dysponując tym pojęciem możemy powiedzieć, że globalny zbiór niestabilny, to zbiór takich punktów, które mają pewną historię zbieżną do punktu w którym badamy niestabilność. Innymi słowy zbiór niestabilny punktu  $p$  to zbiór takich punktów  $x$  posiadających historię  $\{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x\}$  taką, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{-n} = p$ . Oczywiście podejście takie niesie ze sobą pewne trudności techniczne. Dla zachowania jasności i czytelności nie będziemy dalej korzystać z tego uogólnienia. Więcej na ten temat można znaleźć na przykład w książce [14].

Przejdźmy teraz do zbadania otoczenia punktu stałego hiperbolicznego. Jak pokazują następujące twierdzenia, globalny zbiór stabilny punktu przyciągającego zawiera z pewnością pewne otwarte otoczenie tego punktu. Podobnie globalny zbiór niestabilny punktu odpychającego zawiera pewne otwarte otoczenie tego punktu. Oba te przypadki okazują się relatywnie proste do sprawdzenia, jednak są bardzo istotne gdyż stanowią uogólnienie (w lokalnej formie) odpowiednich faktów dla odwzorowań liniowych i podprzestrzeni stabilnych i niestabilnych (w przypadku gdy odpowiednio wszystkie wartości własne są większe lub mniejsze co do modułu od jedności).

**Twierdzenie 1.32.** *Załóżmy, że  $p$  jest punktem stałym przyciągającym odwzorowania  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Istnieje wtedy otwarte otoczenie  $U$  punktu  $p$ , takie, że  $W_{loc}^s(F, p, U) = U$ .*

*Dowód.* Bez utraty ogólności można założyć, że  $p = \mathbf{0}$  (ogólny przypadek otrzymamy składając  $F$  z odpowiednim przesunięciem). Możemy również założyć, że  $DF(\mathbf{0})$  jest w jednej z poniższych postaci (por. fakt 1.11):

- $DF(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ , gdzie  $|\lambda|, |\mu| < 1$ ,
- $DF(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ , gdzie  $\varepsilon > 0$  jest odpowiednio małe oraz  $|\lambda| < 1$ ,
- $DF(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ , gdzie  $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ .

Niezależnie od przypadku, łatwo sprawdzić, że jeśli  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ , to  $|DF(\mathbf{0})v| < |v|$ . Ponieważ  $DF$  zmienia się w sposób ciągły, to istnieje otwarte otoczenie zera  $U$ , w którym powyższa nierówność jest spełniona.

Niech  $\delta > 0$  będzie takie, że jeśli  $|p| < \delta$ , to  $p \in U$ . Niech  $p$  będzie ustalonym punktem spełniającym  $|p| < \delta$  i  $p \neq \mathbf{0}$  oraz niech  $\gamma$  będzie odcinkiem łączącym  $\mathbf{0}$  i  $p$ , danym wzorem  $\gamma(t) = t \cdot p$ , gdzie  $t \in [0, 1]$ . Mamy wówczas  $F(\gamma(0)) = \mathbf{0}$ ,  $F(\gamma(1)) = F(p)$ ,  $\gamma(t) \in U$  dla dowolnego  $t \in [0, 1]$  i  $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ . Stąd:

$$\begin{aligned} |F(p)| &= \left| \int_0^1 (F \circ \gamma)'(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |(F \circ \gamma)'(t)| dt \\ &= \int_0^1 |DF(\gamma(t))\gamma'(t)| dt \\ &< \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = |p| \end{aligned}$$

Wiemy, że ciąg  $\{|F^n(p)|\}$  jest malejącym i ograniczonym ciągiem liczb rzeczywistych, więc jest zbieżny. Niech  $\varepsilon \geq 0$  oznacza granicę tego ciągu. Przypuśćmy, że  $\varepsilon > 0$ . Ponieważ dla każdego  $n$  mamy  $F^n(p) \in \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq |p|\}$ , więc ze zwartości kuli domkniętej na płaszczyźnie, z ciągu  $\{F^n(p)\}$  można wybrać podciąg  $\{F^{n_k}(p)\}$  zbieżny do pewnego  $\alpha \in \mathbb{R}^2$ . Wiemy, że  $\lim |F^{n_k}(p)| = |\alpha| = \varepsilon$ . Z ciągłości  $F$  mamy z kolei  $\lim F(F^{n_k}(p)) = F(\alpha)$ , czyli  $\lim |F^{n_k+1}(p)| = |F(\alpha)| < |\alpha| = \varepsilon$ , co jest w sprzeczności z  $\lim |F^n(p)| = \varepsilon$ . Mamy więc  $F^n(p) \rightarrow \mathbf{0}$ . □

**Twierdzenie 1.33.** *Załóżmy, że  $p$  jest punktem stałym odpychającym odwracalnego odwzorowania  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Istnieje wtedy otwarte otoczenie  $V$  punktu  $p$ , takie, że  $W_{loc}^u(F, p, V) = V$ .*

*Szkic dowodu.* Powyższe twierdzenie jest prostą konsekwencją poprzedniego twierdzenia i wzoru na normę różniczkki odwzorowania odwrotnego. Niech  $G = F^{-1}$ . Łatwo sprawdzić, że  $G$  spełnia założenia poprzedniego twierdzenia wobec czego istnieje otarty zbiór  $V$  zawierający  $p$  taki, że dla każdego  $x \in V$  mamy  $G^n(x) \rightarrow p$  przy  $n \rightarrow \infty$  co jest równoważne  $F^n(x) \rightarrow p$  przy  $n \rightarrow -\infty$ .  $\square$

Zanim przejdziemy do rozważenia sytuacji punktów siodłowych i zaprezentowania uogólnienia twierdzenia 1.25, które okazuje się dużo bardziej skomplikowane i stanowi treść następnego rozdziału (i główny temat tej pracy) przeanalizujemy kilka przykładów odwzorowań i ich zbiorów stabilnych. We wszystkich prezentowanych przypadkach początek układu współrzędnych będzie przyciągającym punktem stałym. Zbiory  $W^s(\mathbf{0})$  w każdym przypadku będą jednak posiadać inne własności geometryczne. Do przedstawiania graficznego tych zbiorów wykorzystano prosty program komputerowy, wobec czego należy liczyć się z naturalnymi błędami zaokrągleń.

**Przykład 1.34.** Niech  $F_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dane będzie wzorem  $F_1(x, y) = (x^2, y^2)$ . Oczywiście  $F_1(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Ponadto:

$$DF_1(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix},$$

czyli  $DF_1(\mathbf{0})$  jest macierzą zerową, ma więc tylko jedną wartość własną równą zero. Początek układu współrzędnych jest więc punktem stałym przyciągającym. Łatwo również napisać wzór ogólny na kolejne iteracji  $F_1$ . Ustalmy  $n \in \mathbb{N}$ . Wtedy  $F_1^n(x, y) = (x^{2n}, y^{2n})$ . Aby więc zbadać, które punkty zbiegają do zera przy  $n \rightarrow \infty$  wystarczy zbadać kiedy ciąg  $x^{2n}$  zbiega do zera. Łatwo sprawdzić, że dzieje się to dla  $|x| < 1$ . Zbiorem stabilnym zera jest więc otwarty kwadrat  $\{(x, y) : |x|, |y| < 1\}$ .

**Przykład 1.35.** Niech teraz  $F_2$  dane będzie nieco bardziej skomplikowanym wzorem:

$$F_2(x, y) = \left( \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y - \cos x + \cos y, 2xy + \frac{1}{2} \sin xy \right).$$

Podobnie jak poprzednio  $F_2(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Różniczką ma postać:

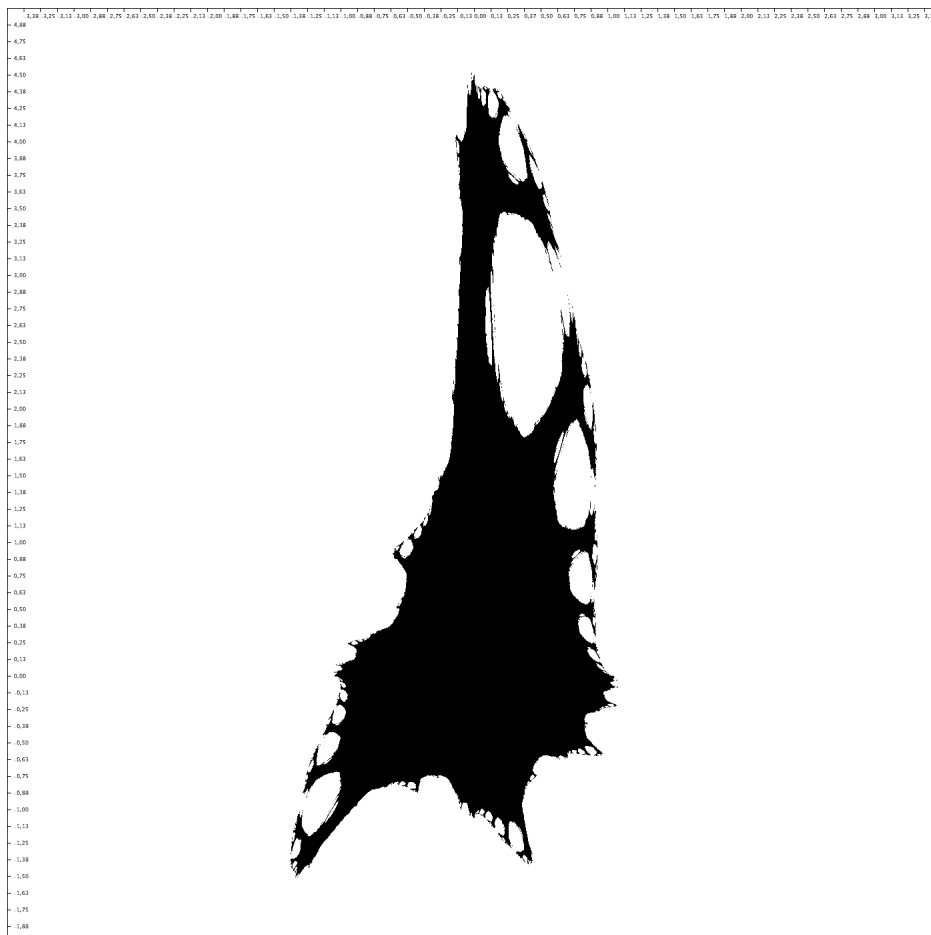
$$DF_2(x, y) = \begin{pmatrix} x + \sin x & \frac{1}{2} - \sin y \\ 2y + \frac{1}{2}y \cos xy & 2x + \frac{1}{2}x \cos xy \end{pmatrix}.$$

Stąd:

$$DF_2(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Macierz ta podobnie jak poprzednio ma dwukrotną wartość własną równą zero. Okazuje się jednak, że w odróżnieniu od poprzedniego przypadku zbiór stabilny ma znacznie

bardziej skompilowaną strukturę. Jego wizualizację<sup>3</sup> przedstawiono na rysunku 1.1. Choć nie podajemy tu formalnego dowodu, przeprowadzone symulacje sugerują, że brzeg tego zbioru jest fraktalem (czyli zbiorem o niecałkowitym wymiarze).



Rysunek 1.1. Zbiór stabilny odwzorowania  $F_2$  w punkcie  $\mathbf{0}$ .

**Przykład 1.36.** Niech teraz  $F_3$  dane będzie wzorem:

$$F_3(x, y) = \left( \frac{1}{5}x^2 + 2y + \frac{3}{10} \sin xy, \frac{1}{4}x + xy - \cos^2 x + \cos y \right).$$

Podobnie jak w obu poprzednich przykładach  $F_3(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Różniczka ma tym razem postać:

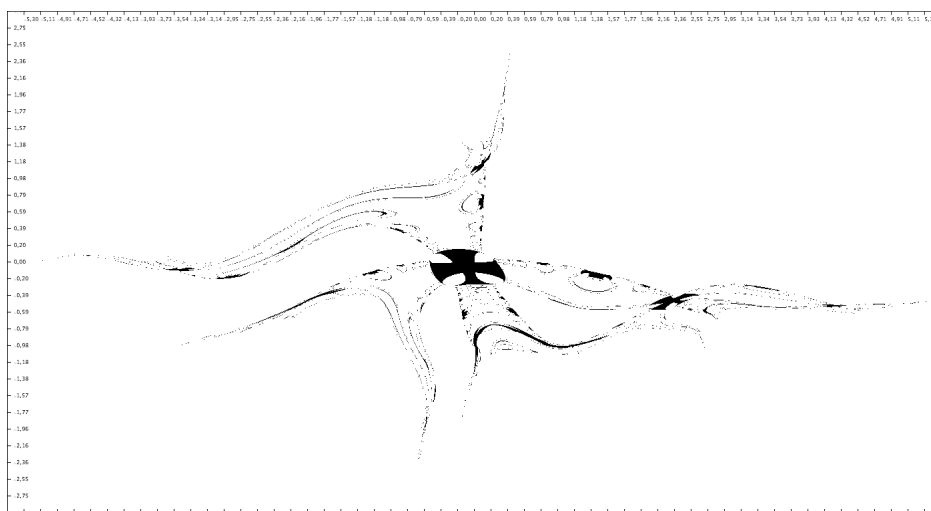
$$DF_3(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}x + \frac{3}{10}y \cos xy & 2 + \frac{3}{10}x \cos xy \\ \frac{1}{4} + y + 2 \cos x \sin x & x - \sin y \end{pmatrix}.$$

<sup>3</sup>Do wizualizacji zbiorów posłużono się programem komputerowym napisanym w środowisku Processing ([www.processing.org](http://www.processing.org)). Obrazy w większej rozdzielczości oraz kod programu dostępne są na stronie autora: [www.hope.art.pl/stable/](http://www.hope.art.pl/stable/).

Stąd:

$$DF_3(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Macierz ta ma dwie wartości własne  $\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{4}$ . Przedstawiona na rysunku 1.2 wizualizacja zbioru stabilnego sugeruje, że posiada on jeszcze bardziej skomplikowaną strukturę niż w poprzednim przykładzie. W szczególności (na tyle, na ile da się to odczytać z rysunku) jest on niespójny.



Rysunek 1.2. Zbiór stabilny odwzorowania  $F_3$  w punkcie  $\mathbf{0}$ .

Z powyższych przykładów widać więc, że zbiory stabilne mogą przyjmować bardzo różne postaci. Od geometrycznie prostych figur takich jak kwadrat, do niespójnych zbiorów fraktalnych o bardzo skomplikowanej geometrii.

## ROZDZIAŁ 2

# Twierdzenie o rozmaitości stabilnej i niestabilnej

Pod koniec poprzedniego rozdziału sformułowano twierdzenia opisujące zachowanie się punktów z bliskiego otoczenia punktów stałych przyciągających i odpychających. Celem tego rozdziału jest opisanie sytuacji punktów siodłowych. Będziemy starali się w pewnym sensie uogólnić twierdzenia podane dla odwzorowań liniowych, mówiące o podprzestrzeniach liniowych stabilnej i niestabilnej. Okazuje się, że przypadku ogólnym, gdy patrzymy na odwzorowania w sposób lokalny, rolę podprzestrzeni liniowych przyjmują rozmaitości. Ich wymiar zgodny jest z wymiarem podprzestrzeni stabilnej i niestabilnej różniczki tego odwzorowania w badanym punkcie. W pierwszej części tego rozdziału podamy i udowodnimy twierdzenie o lokalnej rozmaitości niestabilnej dla odwzorowań określonych na płaszczyźnie. W dalszej części rozdziału omówimy pokrótce twierdzenie o lokalnej rozmaitości stabilnej oraz pojęcia globalnych rozmaitości stabilnej i niestabilnej. Pokażemy też przykłady kilku odwzorowań i ich rozmaitości stabilnych i niestabilnych.

## 2.1. Twierdzenie o lokalnej rozmaitości niestabilnej

**Twierdzenie 2.1** (o lokalnej rozmaitości niestabilnej). *Niech  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  będzie dyfeomorfizmem klasy  $C^m$ ,  $m > 0$  oraz  $p \in \mathbb{R}^2$  będzie punktem stałym siodłowym odwzorowania  $F$ . Istnieje wówczas  $\varepsilon > 0$  oraz krzywa  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$  taka, że:*

1.  $\gamma(0) = p$ ,
2. obraz  $\gamma$  jest niezmienniczy względem  $F^{-1}$ ,
3.  $F^n(\gamma(t)) \rightarrow p$  przy  $n \rightarrow -\infty$ , dla dowolnego  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,
4. jeśli  $|F^{-n}(q) - p| < \varepsilon$  dla wszystkich  $n \geq 0$ , to istnieje  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  takie, że  $\gamma(t) = q$ .

Krzywą  $\gamma$  nazywamy lokalną rozmaitością niestabilną w punkcie  $p$ . Krzywa ta jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do wyboru  $\varepsilon$ .

**Uwaga 2.2.** W wymiarach wyższych niż 2, krzywą  $\gamma$  należy zastąpić przez powierzchnię sparametryzowaną w okolicy  $p$  przez odwzorowanie  $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , gdzie  $U$  jest otwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^k$ , a  $k$  oznacza liczbę wartości własnych  $DF(p)$  większych co do modułu od 1.

Zanim przejdziemy do dowodu twierdzenia omówimy pokrótce samą jego treść. Otóż twierdzenie mówi o tym, że w otoczeniu punktu siodłowego  $p$  da się jednoznacznie (z dokładnością do wyboru  $\varepsilon$ ) wyznaczyć krzywą przechodzącą przez punkt  $p$ , taką, że wszystkie punkty z obrazu tej krzywej (różne od  $p$ ) oddalają się od  $p$  wraz z iterowaniem  $F$  (mówi o tym warunek 3) oraz co więcej, wszystkie inne punkty w tym otoczeniu nie posiadają tej własności. Co więcej punkt 2 mówi, że to „oddalanie” następować będzie wzdłuż tej właśnie krzywej. W uwagach po dowodzie dodatkowo wspomnimy o różniczkowalności krzywej opisanej przez to twierdzenie – w szczególności o postaci jej pochodnej w punkcie  $p$ .

*Dowód.* Zanim przejdziemy do właściwego dowodu zauważmy, że możemy wprowadzić kilka uproszczeń. Po pierwsze możemy założyć, że punkt  $p$  o którym mowa w treści twierdzenia jest początkiem układu współrzędnych. Jeśli bowiem udowodnimy twierdzenie w tym przypadku, możemy przejść do przypadku ogólnego przez złożenie  $F$  z odpowiednim przesunięciem.

Ponadto możemy zakładać, że macierz pochodnej  $DF(\mathbf{0})$  jest postaci:  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ , gdzie  $\lambda > 2$ ,  $0 < \mu < \frac{1}{2}$ . Jeśli bowiem tak nie jest, możemy zamiast  $F$  rozważać odwzorowanie  $F^m$ , dla pewnego  $m$ , tak aby  $DF^m(\mathbf{0})$  było tej postaci. W ostatniej części dowodu pokażemy, że krzywa uzyskana dla  $F^m$  jest również lokalną rozmaitością niestabilną dla  $F$ .

W dalszej części dowodu będziemy używać pewnych specyficznych oznaczeń, które będą pomocne przy zapisie kolejnych iteracji odwzorowania  $F$ . Niech  $q \in \mathbb{R}^2$ . Będziemy pisać:  $F^n(q) = (x_n, y_n)$  dla  $n \in \mathbb{Z}$ . W szczególności więc  $q = (x_0, y_0)$ . Rozważać również będziemy wektory z przestrzeni stycznej  $T_q \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2$ . Wektor taki zapisywać będziemy:  $(\xi_0, \eta_0)_q$ , a jego iterację przy działaniu  $DF(q)$  jako  $(\xi_1, \eta_1)_{F(q)}$ , czyli:

$$DF(q) \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix}_{F(q)}$$

Istotne będą dla nas zbiory wektorów z przestrzeni stycznej spełniające pewne określone warunki. Zbiory te będziemy nazywać odpowiednio wiązką stabilną i niestabilną w punkcie  $q$  i definiujemy je jako:

$$S^u(q) = \left\{ (\xi_0, \eta_0)_q : |\eta_0| \leq \frac{1}{2} |\xi_0| \right\}$$

$$S^s(q) = \left\{ (\xi_0, \eta_0)_q : |\xi_0| \leq \frac{1}{2} |\eta_0| \right\}$$

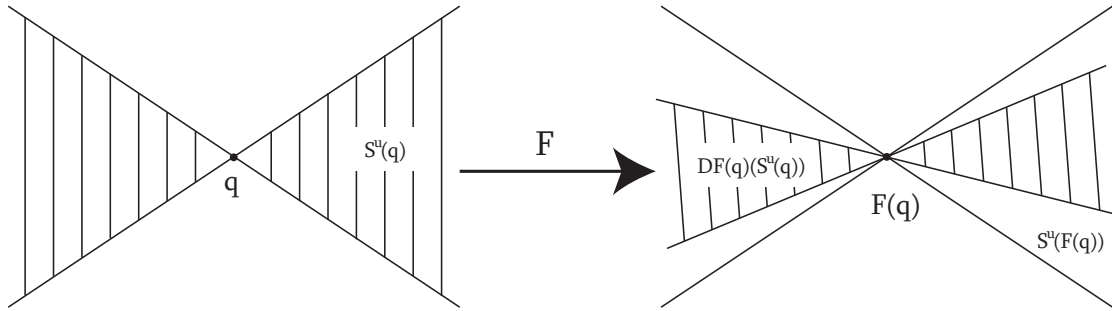
Przy powyższych oznaczeniach, łatwo pokazać, że odwzorowanie  $DF(\mathbf{0})$  zachowuje zbiór  $S^u(\mathbf{0})$ , to znaczy, jeśli wektor  $v$  należy do zbioru  $S^u(\mathbf{0})$ , to jego obraz przy odwzorowaniu  $DF(\mathbf{0})$  również należy do tego zbioru.

Dzieje się tak dlatego, że  $|\xi_1| = \lambda |\xi_0| > 2 |\xi_0|$ . Podobnie  $(DF(\mathbf{0}))^{-1}$  zachowuje  $S^s(\mathbf{0})$ , gdyż  $|\eta_{-1}| = \mu^{-1} |\eta_0| > 2 |\eta_0|$ .

Ponieważ  $F$  jest klasy przynajmniej  $C^1$ , więc  $DF(x, y)$  zmienia się w sposób ciągły, czyli istnieje otoczenie zera, w którym powyższe własności są również spełnione. Oznacza to więc, że istnieje  $\varepsilon > 0$ , taki, że jeśli  $|x|, |y| \leq \varepsilon$ , to:

1.  $DF(x, y)$  zachowuje  $S^u(x, y)$  oraz  $(DF(x, y))^{-1}$  zachowuje  $S^s(x, y)$ ;
2.  $(\xi_0, \eta_0) \in S^u(x, y) \Rightarrow |\xi_1| \geq 2|\xi_0|$ ;
3.  $(\xi_0, \eta_0) \in S^s(x, y) \Rightarrow |\eta_{-1}| \geq 2|\eta_0|$ .

Powyższe warunki opisują pewne specyficzne własności geometryczne odwzorowania  $F$ , które możemy określić jako zachowywanie wiązek stabilnych. Poniższej ilustracje prezentują te własności.



Rysunek 2.1. Własności geometryczne odwzorowania  $F$  (por. fig 6.7 z s. 225 w [1]).

Dalsze rozważania ograniczamy do kwadratu  $B$  zadanego przez nierówności:  $|x|, |y| \leq \varepsilon$  i skupimy się na analizie tzw. krzywych poziomych zawartych w tym kwadracie.

**Definicja 2.3** (krzywa pozioma). Niech  $\varepsilon > 0$ , oraz niech  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| \leq \varepsilon\}$ . Mówimy, że krzywa  $\gamma$  leżąca w  $B$  jest *pozioma* (horyzontalna), jeśli  $\gamma(t) = (t, h(t))$  oraz:

1.  $h$  jest zdefiniowana i ciągła dla wszystkich  $t$  spełniających  $|t| \leq \varepsilon$ ;
2.  $h(0) = 0$ ;
3.  $\forall_{t_1, t_2} |t_1|, |t_2| \leq \varepsilon \Rightarrow |h(t_1) - h(t_2)| \leq \frac{1}{2}|t_1 - t_2|$ .

Przez  $\mathcal{H}$  oznaczmy zbiór wszystkich krzywych poziomych w ustalonym wcześniej kwadracie  $B$ . W zbiorze tym wprowadzamy metrykę (indukowaną przez normę supremum). Niech  $\gamma_i(t) = (t, h_i(t))$  dla  $i = 1, 2$  będą krzywymi z  $\mathcal{H}$ , wówczas za odległość między  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$  przyjmujemy:

$$d[\gamma_1, \gamma_2] := \sup_{|t| \leq \varepsilon} |h_1(t) - h_2(t)|.$$

Zbiór  $\mathcal{H}$  z tak zdefiniowaną metryką  $d$  jest przestrzenią metryczną zupełną.

**Lemat 1.** Niech  $\gamma \in \mathcal{H}$ . Wtedy zbiór będący przekrojem kwadratu  $B$  oraz obrazu krzywej  $\gamma$  przy odwzorowaniu  $F$  jest obrazem krzywej poziomej (innymi słowy istnieje krzywa pozioma, której obraz jest tym zbiorem<sup>1</sup>).

*Dowód.* Niech  $\gamma$  będzie krzywą poziomą daną wzorem  $\gamma(t) = (t, h(t))$ . Zauważmy, że jeśli  $(x_1, y_1) = F(\varepsilon, h(\varepsilon))$ , to  $x_1 \geq 2\varepsilon$ , co wynika z faktu, że  $|\xi_1| \geq 2|\xi_0|$ . Podobnie, jeśli  $(x_1, y_1) = F(-\varepsilon, h(-\varepsilon))$ , to  $x_1 \leq -2\varepsilon$ . Wobec tego spełniony jest pierwszy z warunków z definicji krzywej poziomej.

Oczywiście z warunku  $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  wynika, że obraz krzywej poziomej przechodzi przez początek układu współrzędnych, co gwarantuje spełnienie warunku drugiego z definicji krzywej poziomej.

Założmy teraz, że  $(x_0, y_0), (x'_0, y'_0)$  są takimi punktami na  $F(t, h(t))$ , że  $|y'_0 - y_0| > \frac{1}{2}|x'_0 - x_0|$ . Zakładamy więc, że obraz krzywej poziomej nie spełnia trzeciego warunku z definicji krzywej poziomej. Niech  $t_1, t_2$  będą takie, że  $(x_0, y_0) = F(t_1, h(t_1))$  oraz  $(x'_0, y'_0) = F(t_2, h(t_2))$ . Niech  $l$  będzie odcinkiem łączącym punkt  $(t_1, h(t_1))$  z punktem  $(t_2, h(t_2))$ . Zauważmy, że w każdym punkcie odcinka  $l$  wektor do niego styczny leży w zbiorze  $S^u(\mathbf{0})$ . Odwzorowanie  $F$  przekształca odcinek  $l$  w krzywą gładką  $l_F$ , która łączy punkty  $(x_0, y_0)$  i  $(x'_0, y'_0)$ . Z wniosku z twierdzenia Lagrange o wartości średniej (wniosek 1.10), zastosowanego do złożenia  $l$  z  $F$  wynika, że istnieje punkt na krzywej  $l_F$ , w którym wektor styczny ma nachylenie większe niż  $\frac{1}{2}$ , co jednak jest w sprzeczności z doбором  $\varepsilon$ , który był wybrany tak aby  $DF$  zachowywało wiązki styczne. Wobec tego wiemy, że również warunek trzeci definicji krzywej poziomej musi być spełniony. □

Niech  $\Phi$  będzie odwzorowaniem przestrzeni  $\mathcal{H}$  w siebie, przyporządkowującym krzywej  $\gamma \in \mathcal{H}$  jej obraz przy przekształceniu  $F$ . Zgodnie z powyższym faktem, odwzorowanie  $\Phi$  jest dobrze określone.

**Lemat 2.** Odwzorowanie  $\Phi$  jest zwężające, to znaczy, że istnieje liczba  $c < 1$  taka, że dla dowolnych krzywych poziomych  $\gamma_1, \gamma_2$  zachodzi  $d[\Phi\gamma_1, \Phi\gamma_2] \leq cd[\gamma_1, \gamma_2]$ .

*Dowód.* Niech  $\gamma_1, \gamma_2$  będą krzywymi poziomymi postaci  $\gamma_i(t) = (t, h_i(t))$ , oraz  $t_0$  liczbą rzeczywistą spełniającą  $|t_0| < \varepsilon$ . Założmy, że  $|\Phi\gamma_2(t_0) - \Phi\gamma_1(t_0)| \geq |h_2(t_0) - h_1(t_0)|$  dla wszystkich  $|t| < \varepsilon$ . Niech  $l$  będzie odcinkiem łączącym punkt  $\Phi\gamma_1(t_0)$  z punktem  $\Phi\gamma_2(t_0)$ . Wtedy krzywa zadana przez  $F^{-1}(l)$  łączy punkt  $\gamma_1(\tau_1)$  z  $\gamma_2(\tau_2)$  dla pewnych  $\tau_1, \tau_2$ . Ponieważ  $DF^{-1}$  zachowuje wiązkę stabilną  $S^s$  w każdym punkcie  $l$ , więc wektory styczne do  $F^{-1}(l)$  leżą w wiązce stabilnej w punkcie  $\gamma_1(\tau_1)$ . Wynika stąd, że sama krzywa  $F^{-1}(l)$  leży w

<sup>1</sup>W dalszej części tekstu zakładamy po prostu, że krzywą tą jest  $F(\gamma(t))$  mimo, że w praktyce, może się okazać, że krzywą tą trzeba obciąć tak, aby mieściła się w kwadracie  $B$ .

stożku o wierzchołku  $\gamma_1(\tau_1)$  ograniczonym liniami o nachyleniu  $\pm 2$ . Stąd w szczególności wynika, że:

$$\frac{|h_2(\tau_2) - h_1(\tau_1)|}{|\tau_2 - \tau_1|} \geq 2. \quad (2.1)$$

Ponadto  $DF^{-1}$  działając na wektory styczne, powiększa ich drugie współrzędne nie mniej niż dwukrotnie. Mamy stąd:

$$|h_2(\tau_2) - h_1(\tau_1)| \geq 2 |\Phi\gamma_2(t_0) - \Phi\gamma_1(t_0)|. \quad (2.2)$$

Zauważmy, że założenie  $|h_2(\tau_1) - h_1(\tau_1)| \leq |\Phi\gamma_2(t_0) - \Phi\gamma_1(t_0)|$  w połączeniu z powyższą nierównością prowadzi do:

$$\frac{1}{2} |h_2(\tau_2) - h_1(\tau_1)| \geq |h_2(\tau_1) - h_1(\tau_1)| \quad (2.3)$$

Z własności normy możemy napisać:

$$\begin{aligned} |h_2(\tau_2) - h_2(\tau_1)| &= |h_2(\tau_2) - h_1(\tau_1) + h_1(\tau_1) - h_2(\tau_1)| \\ &\geq |h_2(\tau_2) - h_1(\tau_1)| - |h_2(\tau_1) - h_1(\tau_1)| \end{aligned}$$

Wykorzystując (2.3) mamy dalej:

$$\geq \frac{1}{2} |h_2(\tau_2) - h_1(\tau_1)| \geq |\tau_2 - \tau_1|,$$

przy czym ostatnia nierówność wynika z (2.1). Uzyskaliśmy więc:

$$|h_2(\tau_2) - h_2(\tau_1)| \geq |\tau_2 - \tau_1|$$

co jest w sprzeczności z definicją krzywej poziomej.

Założenie  $|\Phi\gamma_2(t_0) - \Phi\gamma_1(t_0)| \geq |h_2(t) - h_1(t)|$ , dla wszystkich  $|t| < \varepsilon$ , doprowadziło nas do sprzeczności. Zauważmy, że założenie to jest równoważne zaprzeczeniu warunku z treści twierdzenia. Zaprzeczenie definicji odwzorowania zwięzającego ma bowiem postać:

$$\forall_{c < 1} \exists_{\gamma_1, \gamma_2} d[\Phi\gamma_1, \Phi\gamma_2] > cd[\gamma_1, \gamma_2],$$

co jest równoważne:

$$\exists_{\gamma_1, \gamma_2} d[\Phi\gamma_1, \Phi\gamma_2] \geq d[\gamma_1, \gamma_2],$$

korzystając z definicji  $d$  mamy dalej:

$$\exists_{\gamma_1, \gamma_2} \forall_{|t| \leq \varepsilon} \sup_{|t_0| \leq \varepsilon} |\Phi\gamma_1(t_0) - \Phi\gamma_2(t_0)| \geq |h_2(t) - h_1(t)|,$$

co z własności supremum jest równoważne:

$$\exists_{\gamma_1, \gamma_2} \forall_{|t| \leq \varepsilon} \exists_{|t_0| \leq \varepsilon} |\Phi\gamma_1(t_0) - \Phi\gamma_2(t_0)| \geq |h_2(t) - h_1(t)|.$$

Dokładnie to założyliśmy na początku i jak się okazuje doprowadziło nas to do sprzeczności. Wobec tego musi być:

$$\exists c < 1 \forall \gamma_1, \gamma_2 \quad d[\Phi\gamma_1, \Phi\gamma_2] \leq cd[\gamma_1, \gamma_2],$$

czyli  $\Phi$  jest zwężające. □

Stosując twierdzenie Banach o punkcie stałym dla  $\Phi$  otrzymujemy krzywą poziomą  $\gamma_u$ , która jest jedynym punktem stałym tego odwzorowania. Krzywa  $\gamma_u$  jako krzywa pozioma oczywiście przechodzi przez punkt  $\mathbf{0}$  (dla  $t = 0$ ). Ponadto jeśli punkt  $(x_0, y_0)$  należy do obrazu krzywej, oraz  $x_0 \neq 0$ , to z pewnością<sup>2</sup>  $|x_1| > |x_0|$ . Stąd podczas iterowania  $F$  punkty krzywej  $\gamma_u$  albo opuszczają kwadrat  $B$  albo oddalają się od zera wzdłuż krzywej. Stąd oczywiście obraz krzywej  $\gamma_u$  zawarty jest w zbiorze niestabilnym  $W^u(\mathbf{0})$ .

**Lemat 3.** Niech  $(x_0, y_0)$  będzie takim punktem  $B$ , który nie leży na krzywej  $\gamma_u$ . Istnieje wówczas  $n > 0$  takie, że  $F^{-n}(x_0, y_0)$  leży poza  $B$ .

*Dowód.* Niech  $l$  będzie odcinkiem pionowym<sup>3</sup> łączącym punkt  $(x_0, y_0)$  z punktem na obrazie krzywej  $\gamma_u$ . Krzywa  $\gamma_u$  jest pozioma więc punkt ten wyznaczony jest jednoznacznie i ma współrzędne  $(x_0, h_u(x_0))$ . Ponieważ  $DF^{-1}$  powiększa drugą współrzędną wektorów stycznych do  $l$  przynajmniej dwukrotnie, to długość krzywej  $F^{-1}(l)$  wzrasta przynajmniej dwukrotnie w stosunku do  $l$ , co wynika stąd, że odcinek  $l$  leży w wiązce stabilnej  $S^s$  w punkcie  $(x_0, h_u(x_0))$ . Stąd można pokazać<sup>4</sup>, że odpowiednio wiele iteracji  $F^{-1}$  przeniesie punkt  $(x_0, y_0)$  poza kwadrat  $B$ , gdyż długość krzywej  $F^{-n}(l)$  będzie rosła i dalej z definicji i własności kwadratu  $B$  będziemy mieć, że od pewnego  $n_0$  przynajmniej jej fragment wraz z końcem  $(x_{n_0}, y_{n_0})$  musi opuścić kwadrat  $B$ . □

Z powyższego lematu i wcześniejszych komentarzy na temat  $\gamma_u$  wynika, że jest ona dokładnie lokalną rozmaitością niestabilną w zerze.

Na początku dowodu poczyniliśmy pewne założenie odnośnie  $F$  z komentarzem, że jeśli nie są one spełnione, można wziąć zamiast  $F$  pewną iterację  $F^m$  i otrzymana w ten sposób rozmaitość niestabilna jest również „dobra” dla  $F$ . Sprawdźmy teraz, że tak rzeczywiście jest.

Wiemy, że istnieje krzywa  $\gamma_u$  niezmiennicza względem  $F^{-m}$ . Jeśli  $\gamma_u$  nie jest również  $F^{-1}$ -niezmiennicza, to przynajmniej  $F^{-1}(\gamma_u)$  też jest  $F^{-m}$ -niezmiennicza, bo:

$$F^{-m}(F^{-1}(\gamma_u)) = F^{-m}(F^{-1}(F^m(\gamma_u))) = F^{-m-1+m}(\gamma_u) = F^{-1}(\gamma_u).$$

<sup>2</sup>Wynika to z doboru  $\varepsilon$  i własności kwadratu  $B$ .

<sup>3</sup>Chodzi o rzut prostopadły na krzywą  $\gamma_u$ .

<sup>4</sup>Mówiąc ściślej należy, jedynie wykluczyć sytuację w której krzywa mimo wzrostu długości, pozostaje wciąż w kwadracie  $B$ . Dla większej czytelności pomijamy te szczegóły techniczne.

Ponieważ jednak  $\gamma_u$  było wyznaczone jednoznacznie więc jest jedyną niestabilną krzywą niezmienniczą względem  $F^{-m}$ , więc  $\gamma_u$  musi być  $F^{-1}$ -niezmiennicza. Z dotychczasowych rozważań wynika, że  $\gamma_u$  jest lokalną rozmaitością niestabilną dla  $F$ .  $\square$

**Uwaga 2.4.** Można pokazać, że jeśli  $F$  jest klasy  $C^r$ ,  $\infty \geq r > 0$ , to również  $\gamma$  jest klasy  $C^r$ .

*Szkic dowodu dla  $r = 1$ .* Korzystamy tu z tych samych oznaczeń i definicji co w dowodzie twierdzenia o lokalnej rozmaitości niestabilnej. Zdefiniujmy na początku *pole krzywych poziomych* jako parę funkcji  $\zeta(x) = (\gamma(x), M(x))$ , gdzie  $\gamma$  jest pewną krzywą poziomą, a  $M$  jest funkcją ciągłą o wartościach rzeczywistych, taką, że  $|M(x)| \leq \frac{1}{2}$  dla  $|x| \leq \varepsilon$ . Funkcję  $\zeta$  interpretujemy geometrycznie jako krzywą  $\gamma$  wraz z „doczepionymi” prostymi (bądź odcinkami) przechodzącymi przez punkty  $\gamma(x)$  o nachyleniu  $M(x)$ . Ponieważ założyliśmy, że  $|M(x)| \leq \frac{1}{2}$  więc wektor kierunkowy każdej takiej prostej należy do  $S^u$ .

Oznaczmy przez  $\mathcal{H}_1$  zbiór wszystkich pól krzywych poziomych w  $B$ . Na  $\mathcal{H}_1$  określamy metrykę wzorem:

$$d[\zeta_1, \zeta_2] = \sup_{|x| \leq \varepsilon} (|\gamma_1(x) - \gamma_2(x)|, |M_1(x) - M_2(x)|).$$

Definiujemy również rozszerzoną wersję przekształcenia  $\Phi$ , które dane będzie wzorem:

$$\Phi_1(\zeta) = (\Phi\gamma, \hat{M})$$

gdzie  $\zeta = (\gamma, M)$ ,  $\Phi$  było zdefiniowane wcześniej natomiast  $\hat{M}$  jest nachyleniem prostej o współczynniku  $M$  przekształconej przez  $DF$ . Dokładniej, jeśli  $\gamma(x) = (t, h(x))$  i  $v$  jest wektorem o nachyleniu  $M(x)$ , to  $\hat{M}$  jest nachyleniem wektora  $DF(\gamma(x))v$ .

Tak zdefiniowane  $\Phi_1$  jest przekształceniem  $\mathcal{H}_1$  w siebie (odwzorowanie  $DF$  zachowuje wiązki  $S^u$ , czyli jeśli  $|M(x)| \leq \frac{1}{2}$ , to również  $|\hat{M}(x)| \leq \frac{1}{2}$ ). Ponadto można pokazać, że jeśli  $\zeta_1 = (\gamma, M_1), \zeta_2 = (\gamma, M_2)$  są polami linii poziomych opartymi na tej samej krzywej poziomej, to zachodzi:

$$d[\Phi_1\zeta_1, \Phi_1\zeta_2] < d[\zeta_1, \zeta_2].$$

Z tego oraz z faktu, że  $\Phi$  jest kontrakcją, można wywieść, że  $\Phi_1$  posiada dokładnie jeden punkt stały w  $\mathcal{H}_1$ . Punkt ten jest postaci  $\zeta_u = (\gamma_u, M_u)$ , gdzie  $\gamma_u$  jest krzywą wyznaczoną w dowodzie twierdzenia.

Można pokazać, że  $M_u(x)$  jest nachyleniem wektora stycznego do  $\gamma_u$  w punkcie  $x$ .  $\square$

**Uwaga 2.5.** Dodatkowo można pokazać, że krzywa uzyskana w sposób przedstawiony w poprzednim dowodzie jest regularna, to znaczy  $\gamma'(t) \neq 0$  dla wszystkich  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Można też pokazać, że  $\gamma'(0)$  jest wektorem własnym  $DF(p)$  odpowiadającym wartości własnej o większym module.

## 2.2. Twierdzenie o lokalnej rozmaitości stabilnej

Po udowodnieniu twierdzenia o lokalnej rozmaitości niestabilnej dość łatwo można udowodnić wersję twierdzenia w przypadku stabilnym – ponieważ dowód przebiega analogicznie do poprzedniego pominiemy go i ograniczymy się jedynie do sformułowania twierdzenia w takiej formie, która zbiera również dodatkowe informacje zawarte w uwagach do twierdzenia poprzedniego.

**Twierdzenie 2.6** (o lokalnej rozmaitości stabilnej). *Niech  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  będzie odwzorowaniem klasy  $C^r$ ,  $r \geq 1$  oraz  $p \in \mathbb{R}^2$  będzie punktem stałym siodłowym odwzorowania  $F$ . Istnieje wówczas  $\varepsilon > 0$  oraz krzywa  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$  klasy  $C^r$ , spełniająca:*

1.  $\gamma(0) = p$ ,
2.  $\gamma$  jest regularna,
3. wektor  $\gamma'(0)$  jest wektorem własnym odwzorowania  $DF(p)$  odpowiadającym wartości własnej o module mniejszym niż 1,
4. obraz  $\gamma$  jest niezmienniczy względem  $F$ ,
5.  $F^n(\gamma(t)) \rightarrow p$  przy  $n \rightarrow \infty$ ,
6. jeśli  $|F^n(q) - p| < \varepsilon$  dla wszystkich  $n \geq 0$ , to istnieje  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  takie, że  $\gamma(t) = q$ .

Krzywą  $\gamma$  nazywamy lokalną rozmaitością stabilną w punkcie  $p$ . Jest ona wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do wyboru  $\varepsilon$ .

**Uwaga 2.7** (transwersalność rozmaitości stabilnej i niestabilnej). Wybiegając nieco naprzód (więcej szczegółów można znaleźć w rozdziale następnym) można dodatkowo pokazać, że rozmaitości lokalne stabilna  $\gamma_s$  i niestabilna  $\gamma_u$  w punkcie  $p$  przecinają się transwersalnie, co w przypadku przestrzeni  $\mathbb{R}^2$  sprowadza się do warunku, że w punkcie  $p$  wektory styczne do  $\gamma_u$  i  $\gamma_s$  są liniowo niezależne i z uwagi na definicję punktu siodłowego jest oczywiste. Okazuje się jednak, że jest to własność ogólna przenosząca się na wyższe wymiary oraz na przypadek ciągłych układów dynamicznych.

## 2.3. Globalna rozmaitość stabilna i niestabilna

Jak wspomniano we wstępie, w tej pracy koncentrujemy się głównie na przypadku lokalnym, jednak dla porządku podajemy również poniżej definicje globalne rozmaitości stabilnej i niestabilnej.

**Definicja 2.8** (rozmaitość niestabilna i stabilna). Niech  $p$  będzie punktem stałym hiperbolicznym odwzorowania  $F$  oraz niech  $\gamma_u$  będzie lokalną rozmaitością niestabilną w punkcie  $p$ . Rozmaitość niestabilną w punkcie  $p$ , oznaczmy  $W^u(p)$  i definiujemy:

$$W^u(p) = \bigcup_{n>0} F^n(\gamma_u).$$

Analogicznie, jeśli  $\gamma_s$  jest lokalną rozmaitością stabilną w punkcie  $p$ , to rozmaitość stabilną  $W^s(p)$  definiujemy:

$$W^s(p) = \bigcup_{n>0} F^{-n}(\gamma_s).$$

## 2.4. Przykłady

W poniższych przykładach pokazujemy odwzorowania w których udaje się, analitycznie bądź graficznie, przedstawić dokładną postać rozmaitości stabilnych i niestabilnych. Sytuacja ta jest o tyle nietypowa, że w ogólnym przypadku nie jesteśmy w stanie łatwo „wyznaczyć” tych rozmaitości. Przykłady te pokazują jednak dość dokładnie globalne własności rozmaitości stabilnych i niestabilnych, stąd są bardzo cenne i warte przeanalizowania. Przykłady zaczerpnięto z książki [1].

**Przykład 2.9.** Niech  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  będzie dane wzorem:

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ 2y - \frac{15}{8}x^3 \end{pmatrix}.$$

Łatwo możemy sprawdzić, że początek układu współrzędnych jest punktem stałym odwzorowania  $F$ . Ponadto zachodzi:

$$DF(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

czyli początek układu współrzędnych jest punktem siodłowym. Zauważmy, że:

$$F \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix},$$

stąd oś  $y$  jest rozmaitością niestabilną. Ponadto:

$$F \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \left(\frac{1}{2}t\right)^3 \end{pmatrix},$$

więc krzywa  $y = x^3$  jest rozmaitością stabilną. W obu przypadkach są to rozmaitości globalne.

Zauważmy, że  $F$  jest topologicznie sprzężone z odwzorowaniem liniowym  $L := DF(\mathbf{0})$  poprzez dyfeomorfizm przejścia  $h$ :

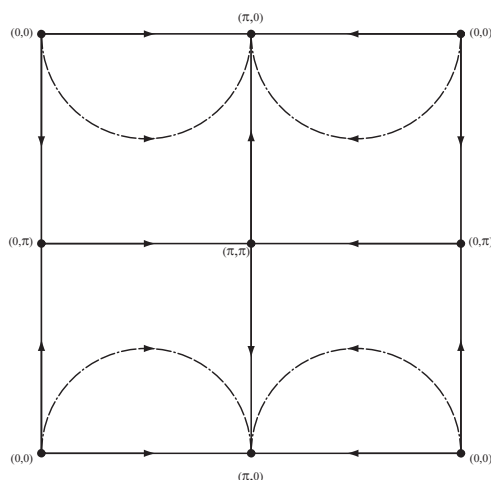
$$h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^3 - y \end{pmatrix}.$$

Mamy, że  $F \circ h = h \circ L$ . Zauważmy, że  $h$  odwzorowuje podprzestrzenie stabilną i niestabilną odwzorowania  $L$  na rozmaitości stabilną i niestabilną  $F$ .

**Przykład 2.10.** Niech  $T$  będzie torusem sparametryzowanym przez  $\theta_1, \theta_2$  z kwadratu  $0 \leq |\theta_i| \leq 2\pi$  z utożsamionymi krawędziami. Określmy  $F: T \rightarrow T$  wzorem:

$$F \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 + \varepsilon \sin \theta_1 \\ \theta_2 + \varepsilon \sin \theta_2 \cos \theta_1 \end{pmatrix}.$$

Jeśli  $\varepsilon$  jest odpowiednio małe, to  $F$  jest dyfeomorfizmem, który posiada cztery punkty stałe: punkt odpychający o współrzędnych  $(0, 0)$ , punkty siodłowe  $(0, \pi)$ ,  $(\pi, \pi)$  oraz punkt przyciągający  $(\pi, 0)$ . Dynamikę odwzorowania  $F$  przedstawia portret fazowy<sup>5</sup> na rysunku 2.2.

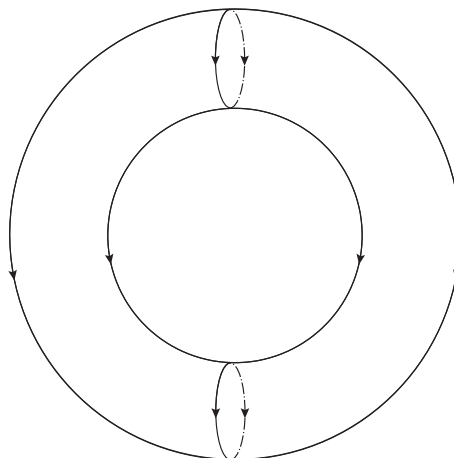


**Rysunek 2.2.** Portret fazowy odwzorowania  $F$  (por. fig 6.2 ze s. 220 w [1]).

Zauważmy, że rozmaitość niestabilna w punkcie  $(0, \pi)$  pokrywa się dokładnie z rozmaitością stabilną punktu  $(\pi, \pi)$ . Rozmaitość stabilna w punkcie  $(0, \pi)$  wypływa niejako z punktu źródłowego  $(0, 0)$ , natomiast rozmaitość niestabilna w  $(\pi, \pi)$  leży w basenie przyciągania punktu przyciągającego  $(\pi, 0)$ .

Dynamika odwzorowania  $F$  może również zostać przedstawiona obrazowo na torusie, pokazano to na rysunku 2.3.

<sup>5</sup>Portret fazowy to graficzny sposób przedstawiania dynamicznych własności odwzorowania. Strzałki na diagramie obrazują kierunek przemieszczania się punktów wraz z iterowaniem odwzorowania.

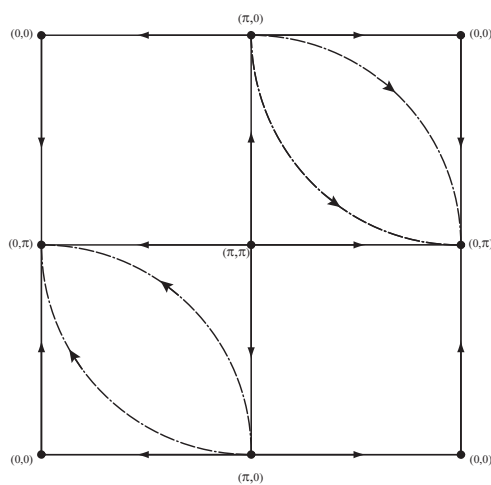


Rysunek 2.3. Dynamika odwzorowania  $F$  (por. fig 6.3 ze s. 221 w [1]).

**Przykład 2.11.** Podobnie jak w poprzednim przykładzie rozważmy dyfeomorfizm określony na torusie  $T$ . Niech  $G: T \rightarrow T$  dane będzie wzorem:

$$G \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 - \varepsilon \sin \theta_1 \\ \theta_2 + \varepsilon \sin \theta_2 \end{pmatrix}.$$

Tak jak w przypadku odwzorowania  $F$  z poprzedniego przykładu, mamy tu cztery punkty stałe: dwa punkty siodłowe  $(0, 0)$  i  $(\pi, \pi)$ , punkt przyciągający  $(0, \pi)$  i punkt odpychający  $(\pi, 0)$ . Portret fazowy przedstawiono na rysunku 2.4. Zauważmy, że w tym przypadku rozmaitości niestabilne obu punktów siodłowych dążą do punktu przyciągającego, natomiast obie rozmaitości stabilne wychodzą z punktu odpychającego.



Rysunek 2.4. Dynamika odwzorowania  $F$  (por. fig 6.4 ze s. 221 w [1]).

## Dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a i zbiory hiperboliczne

### 3.1. Punkty rekurencyjne i łańcuchowo-rekurencyjne

Zgodnie z zapowiedzią z rozdziału 1 zajmiemy się teraz sformułowaniem uogólnionych klas punktów, które stanowią rozszerzenie pojęcia punktu okresowego. Przytaczane tu definicje są istotne dla nas po pierwsze dlatego, że prezentują uogólnienia badanych wcześniej pojęć. Po drugiej jednak są ważne po to, by w następnym punkcie można było zdefiniować klasę dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a.

**Definicja 3.1** (punkt rekurencyjny). Niech  $F: U \rightarrow U$ , gdzie  $U$  zbiór otwarty w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ . Punkt  $p \in U$  nazywamy rekurencyjnym, jeśli dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $n > 0$  takie, że  $d(F^n(p), p) < \varepsilon$ .

**Uwaga 3.2.** Łatwo można zauważyć, że każdy punkt okresowy jest również rekurencyjny. Dla punktu okresowego  $p$  wiemy bowiem, że istnieje  $n$  takie, że  $d(F^n(p), p) = 0$ .

Układ startując z punktu rekurencyjnego będzie wracać w czasie dowolnie blisko swojego stanu początkowego. Poniższy prosty fakt ilustruje dodatkową własność punktów rekurencyjnych, pozwalającą nazywać je również punktami niemal okresowymi.

**Fakt 3.3.** Niech  $F: U \rightarrow U$ , gdzie  $U$  zbiór otwarty w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  oraz  $p \in U$  niech będzie punktem rekurencyjnym. Dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  istnieje nieskończony ciąg rosnący liczb naturalnych  $(n_i)$  taki, że dla dowolnego  $i$  zachodzi  $d(F^{n_i}(p), p) < \varepsilon$ .

*Dowód.* Twierdzenie jest oczywiście spełnione dla punktów okresowych. Załóżmy więc, że  $p$  nie jest okresowy.

Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Niech  $n_1$  będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że:  $d(F^{n_1}(p), p) < \varepsilon$ . Weźmy teraz  $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}d(F^{n_1}(p), p)$ . Wiadomo, że  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ . Stosując ponownie powyższe rozumowanie dla  $\varepsilon_1$  dostaniemy liczbę  $n_2$  taką, że  $d(F^{n_2}(p), p) < \varepsilon_1$ . Wiadomo, że  $n_2 \geq n_1$  gdyż  $n_1$  było najmniejszą liczbą spełniającą  $d(F^n(p), p) < \varepsilon$  a  $n_2$  również spełnia tą nierówność. Ponadto  $n_2 \neq n_1$  gdyż  $d(F^{n_2}(p), p) < d(F^{n_1}(p), p)$ . Stąd  $n_2 > n_1$ .

Powtarzając to postępowanie dla kolejnych  $i$  budujemy indukcyjnie ciąg liczb naturalnych  $(n_i)_i$  taki, że ciąg  $(d(F^{n_i}(p), p))_i$  spełnia warunek z tezy.  $\square$

Podamy teraz definicję jeszcze ogólniejszej klasy punktów, a mianowicie punktów łańcuchowo-rekurencyjnych.

**Definicja 3.4** (punkt łańcuchowo-rekurencyjny). Niech  $F: U \rightarrow U$ , gdzie  $U$  zbiór otwarty w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ . Punkt  $p \in U$  nazywamy łańcuchowo-rekurencyjnym, jeśli dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  istnieją punkty  $p = p_0, p_1, \dots, p_k = p$  oraz dodatnie liczby naturalne  $n_1, \dots, n_k$  takie, że  $d(F^{n_i}(p_{i-1}), p_i) < \varepsilon$  dla  $i = 1, \dots, k$ .

**Uwaga 3.5.** Na mocy udowodnionego wcześniej faktu wiemy, że punkty rekurencyjne są również punktami łańcuchowo-rekurencyjnymi, gdyż dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  możemy dobrać takie liczby  $n_i$ , że  $d(F^{n_i}(p), p) < \varepsilon$  dla dowolnie wielu  $i$ .

Oczywiście, skoro wyróżniamy specjalną klasę punktów łańcuchowo-rekurencyjnych jako uogólnienie punktów rekurencyjnych, to należy się spodziewać, że rzeczywiście jest to istotne rozszerzenie tej klasy. Jest tak w istocie – to znaczy poniższy fakt jest prawdziwy.

**Fakt 3.6.** *Istnieją punkty, które są łańcuchowo-rekurencyjne, ale nie są rekurencyjne.*

**Przykład 3.7.** Zamiast dowodu powyższego faktu posłużymy się przykładem szczególnego przypadku. Załóżmy, że  $p, q$  są hiperbolicznym punktem stałym pewnego odwzorowania  $F$ . Wtedy punkty spełniające  $x_1 \in W^u(p) \cap W^s(p)$ ,  $x_2 \in W^u(p) \cap W^s(q)$ ,  $x_3 \in W^u(q) \cap W^s(p)$  są punktami łańcuchowo-rekurencyjnym, ale nie są punktami rekurencyjnymi.

Punkty  $x_i$  z powyższego przykładu mają bardzo ciekawe własności i zostały dość dokładnie zbadane i zdefiniowane. Dla porządku podajemy niżej dokładną definicję.

**Definicja 3.8** (punkt homokliniczny i heterokliniczny). Niech  $F: U \rightarrow U$  dyfeomorfizm. Punkt  $x \in U$  dla którego granice  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x)$  oraz  $\lim_{n \rightarrow -\infty} F^n(x)$  istnieją i są równe punktowi stałemu  $p \in U$ , nazywamy punktem homoklinicznym. Punkt  $y \in U$  dla którego wspomniane granice istnieją, ale mają dwie różne wartości stanowiące dwa różne punkty stałe nazywamy punktem heteroklinicznym.

Założmy, że  $U$  zbiór otwarty a  $F: U \rightarrow U$  jest dyfeomorfizmem. Przez  $\Lambda = \Lambda(F)$  oznaczmy zbiór wszystkich punktów łańcuchowo-rekurencyjnych odwzorowania  $F$ . Zbiór  $\Lambda$  nazywać będziemy po prostu zbiorem łańcuchowo-rekurencyjnym.

**Fakt 3.9.** *Zbiór  $\Lambda(F) \subset U$  jest domknięty. Co więcej, jeśli dwa dyfeomorfizmy  $F, G: U \rightarrow U$  są topologicznie równoważne przez homeomorfizm  $h$ , to  $h$  odwzorowuje zbiór  $\Lambda(F)$  na  $\Lambda(G)$ .*

## 3.2. Dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a i stabilność strukturalna

W tym punkcie przyjrzymy się nieco ciekawej grupie odwzorowań i niejako „przy okazji” powiemy krótko o pojęciu stabilności strukturalnej, która jest kolejnym ważnym zagadnieniem z szeroko pojętych badań stabilności układów dynamicznych. Na początek przytoczymy definicję transwersalności.

**Definicja 3.10** (rozmaitości transwersalne). Niech  $M_1, M_2$  podrozmaitości rozmaitości  $M$ . Mówimy, że  $M_1$  jest transwersalne z  $M_2$  jeśli  $M_1$  jest rozłączone z  $M_2$ , lub jeśli w dowolnym punkcie wspólnym  $q \in M_1 \cap M_2$  wektory styczne do  $M_1$  i  $M_2$  są liniowo niezależne.

Podana wyżej definicja w wersji abstrakcyjnej wydawać się może mało intuicyjna. W badanych przez nas przypadkach płaszczyzny  $\mathbb{R}^2$  sprowadza się jednak do tego, że krzywe transwersalne to krzywe, które albo wcale się nie przecinają, albo przecinają się tak, że wektory styczne w punkcie przecięcia nie są współliniowe. Jak wspomniano w jednej z uwag w rozdziale drugim, lokalne rozmaitości stabilna i niestabilna w punkcie siodłowym zawsze przecinają się transwersalnie. W poniższej definicji wymagamy jeszcze więcej – chcemy bowiem, aby wszystkie rozmaitości stabilne i niestabilne w różnych punktach siodłowych były wzajemnie (parami) transwersalne.

**Definicja 3.11** (dyfeomorfizm Morse'a-Smale'a). Dyfeomorfizm  $F: U \rightarrow U$ , który spełnia warunki:

- a) zbiór punktów łańcuchowo-rekurencyjnych jest skończonym zbiorem hiperbolicznych punktów okresowych,
- b) stabilne i niestabilne rozmaitości punktów siodłowych są transwersalne.

Jedną z ciekawszych własności tej grupy odwzorowań jest posiadanie własności zwanej strukturalną stabilnością. Samo zagadnienie badania strukturalnej stabilności układu dynamicznego, sprowadza się do odpowiedzi na pytanie, czy układy (a tak naprawdę odwzorowania) nie różniące się znacznie od wejściowego, mają takie same czy zupełnie inne własności dynamiczne. A to z kolei sprowadza się do sprawdzenia, czy odwzorowania bliskie wejściowemu odwzorowaniu, są z nim topologicznie sprzężone. Skoro tak, to cały problem sprowadza się do ustalenia co to znaczy, że jedno odwzorowanie jest bliskie drugiemu. W tym celu wprowadzimy (przypomnimy) definicję metryki supremum znanej dobrze z analizy funkcjonalnej.

**Definicja 3.12** (metryka supremum). Niech  $F, G: U \rightarrow U$  klasy  $C^r$  dla  $r \geq 0$ , gdzie  $U \subset \mathbb{R}^n$  zbiór otwarty oraz  $k \leq r$ . Wtedy  $d_k$  zdefiniowane jako:

$$d_k(F, G) = \sup_{x \in U} \left( \|F(x) - G(x)\|, \dots, \|F^{(k)}(x) - G^{(k)}(x)\| \right),$$

jest poprawnie zdefiniowaną metryką. Metrykę taką będziemy nazywać metryką supremum w przestrzeni  $C^k$ .

**Definicja 3.13** (stabilność strukturalna). Niech  $U \subset \mathbb{R}^n$  zbiór otwarty oraz  $F: U \rightarrow U$  odwzorowanie klasy  $C^r$ , dla  $r \geq 0$  oraz  $k \leq r$ . Mówimy, że  $F$  jest  $C^k$ -strukturalnie stabilne na  $U$  jeśli istnieje  $\varepsilon > 0$  takie, że dla dowolnego  $G: U \rightarrow U$  klasy co najmniej  $C^k$ , spełniającego  $d_k(F, G) < \varepsilon$  odwzorowania  $F$  i  $G$  są ze sobą sprzężone topologicznie.

Badania stabilności strukturalnej jest jednym z ważniejszych zagadnień teorii układów dynamicznych. Intuicja jest w tym przypadku bardzo prosta – pytając o strukturalną stabilność układu, pytamy jak małe zaburzenia układu wpłyną na jego zachowania. Jeśli układ jest stabilny strukturalnie, to przy odpowiednio małych zaburzeniach jego zachowanie nie zmieni się (wiemy bowiem, że topologiczne sprzężenie zachowuje wszystkie charakterystyczne własności o których dotychczas mówiliśmy).

Kiedy znamy już definicję samego pojęcia, jesteśmy gotowi do przytoczenia jednego z ważniejszych wyników dotyczących dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a.

**Twierdzenie 3.14.** *Niech  $F: U \rightarrow U$  będzie dyfeomorfizmem Morse'a-Smale'a, a  $U$  będzie otwartym podzbiorem określonym na powierzchni zwartej. Wtedy  $F$  jest  $C^1$ -strukturalnie stabilne.*

### 3.3. Zbiory hiperboliczne

W tej części pokrótce opiszemy uogólnienie pojęcia rozmaitości stabilnych. We wcześniejszych rozważaniach koncentrowaliśmy uwagę na punktach stałych (ewentualnie okresowych), które były hiperboliczne. Okazuje się, że pojęcie hiperboliczności można rozszerzyć także na inne punkty, nie będące punktami stałym (okresowymi) – innymi słowy można podać ogólniejszą definicję zbioru hiperbolicznego, którego elementy mają podobne własności jak punkty stałe hiperboliczne. Dla uproszczenia, podobnie jak to miało miejsce w poprzednich rozdziałach, będziemy poruszać się głównie w przestrzeni  $\mathbb{R}^2$ .

**Definicja 3.15** (zbiór hiperboliczny). Niech  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  będzie pewnym dyfeomorfizmem. Zbiór  $\Lambda$  nazywamy zbiorem hiperbolicznym dyfeomorfizmu  $F$  jeśli spełnione są warunki:

1. Dla dowolnego  $p \in \Lambda$  istnieją proste  $E^s(p)$  i  $E^u(p)$  w przestrzeni stycznej  $T_p \mathbb{R}^2$ , które są zachowane przez  $DF(p)$ .
2. Proste  $E^s(p), E^u(p)$  zmieniają się w zależności od  $p$  w sposób ciągły.
3. Dla dowolnego  $p \in \Lambda$  istnieje  $\lambda > 1$ , takie, że  $|DF(p)v| \geq \lambda|v|$  dla  $v \in E^u(p)$  oraz  $|DF^{-1}(p)v| \geq \lambda|v|$  dla  $v \in E^s(p)$ .

**Uwaga 3.16.** Zauważmy, że jeśli  $p$  jest punktem stałym siodłowym, to jest elementem zbioru hiperbolicznego<sup>1</sup>. Mamy bowiem wtedy  $|\lambda_1| > 1$  i  $|\lambda_2| < 1$ , które są wartościami własnymi  $DF(p)$ . Proste  $E^s(p)$  i  $E^u(p)$  istnieją na mocy twierdzenia 1.25 i dla  $\lambda = \max\left(|\lambda_1|, \left|\frac{1}{\lambda_2}\right|\right)$  punkt trzeci jest spełniony. Co więcej, jeśli tylko  $F$  jest klasy  $C^1$ , to otoczenie punkt  $p$  również należy do zbioru hiperbolicznego.

<sup>1</sup>Bardziej formalnie należałoby powiedzieć, że punkt siodłowy może być elementem zbioru hiperbolicznego, gdyż w definicji tego zbioru nie wymagamy nigdzie aby było on „maksymalny” w sensie zawierania. Nie mniej jednak w większości zastosowań chodzi nam właśnie o taki „maksymalny” zbiór.

Dla tak zdefiniowanego zbioru hiperbolicznego można udowodnić poniższe twierdzenie, które jest uogólnieniem twierdzenia 2.1 (o lokalnej rozmaitości niestabilnej). Dowód twierdzenia przebiega podobnie do dowodu przedstawionego w rozdziale drugim, jest jednak bardziej skomplikowany technicznie dlatego został pominięty. W treści twierdzenia pojawia się symbol  $\gamma^*$ . Przypomnijmy, że oznacza on obraz krzywej  $\gamma$ .

**Twierdzenie 3.17** (o lokalnej rozmaitości niestabilnej dla zbiorów hiperbolicznych). *Niech  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  będzie dowolnym dyfeomorfizmem takim, że  $\Lambda$  jest domkniętym, niezmienniczym zbiorem hiperbolicznym  $F$ . Istnieje wtedy  $\varepsilon > 0$  taki, że dla dowolnego  $p \in \Lambda$  istnieje gładka krzywa  $\gamma_p: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$  spełniająca warunki:*

1.  $\gamma_p(0) = p$ ,
2.  $\gamma_p$  jest krzywą regularną,
3. wektor  $\gamma_p'(0)$  leży wzdłuż prostej  $E^u(p)$ ,
4.  $F^{-1}(\gamma_p^*) \subset \gamma_{F^{-1}(p)}^*$ ,
5.  $|F^{-n}(\gamma_p(t)) - F^{-n}(p)| \rightarrow 0$  gdy  $n \rightarrow \infty$ .

Ponadto krzywe  $\gamma_p$  zmieniają się w sposób ciągły w zależności od  $p$ .

W przypadku twierdzenia w wersji dla punktów stałych dość łatwo mogliśmy zbadać czy dany punkt spełnia założenia twierdzenia – to znaczy czy jest punktem stałym siodłowym. Wystarczyło bowiem policzyć różniczkę odwzorowania i zbadać jej wartości własne. W przypadku uogólnionym nie jest to już takie proste. Nie jest bowiem jasne jak zbadać czy zadany zbiór jest hiperboliczny. Poniżej opiszemy pokrótce jedno z kryteriów, które może okazać się pomocne. Zaczniemy od uogólnienia pojęcia wiązek stabilnych i niestabilnych przedstawionych w dowodzie głównego twierdzenia drugiego rozdziału.

**Definicja 3.18** ( $\alpha$ -stożek). Dla dowolnego  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  zbiór wszystkich wektorów, które są nachylone do  $v$  lub  $-v$  pod kątem nie większym niż  $\alpha$  nazywamy  $\alpha$ -stożkiem wokół wektora  $v$ . Wektor  $v$  nazywamy rdzeniem  $\alpha$ -stożka.

**Definicja 3.19** (pole stożków). Niech  $U$  będzie zbiorem otwartym. Polem stożków na  $U \subset \mathbb{R}^2$  nazywamy przyporządkowanie punktom  $U \ni p \mapsto C(p)$ , gdzie  $C(p)$  jest  $\alpha(p)$ -stożkiem wokół wektora  $v_p$  oraz:

1.  $\alpha(p)$  zmienia się w sposób ciągły w zależności od  $p$ ,
2. rdzeń stożka  $v_p$  zależy od  $p$  w sposób ciągły.

**Uwaga 3.20.** Zauważmy, że pole stożków jest istotnie uogólnieniem pojęć wiązek stabilnych używanych w rozdziale drugim. Wiązka stabilna  $S^s(p)$  była bowiem w istocie takim polem stożków, które każdemu punktowi przyporządkowało odpowiedni  $\alpha$ -stożek wokół wektora  $e_2$ . Podobnie  $S^u(p)$  przyporządkowało  $\alpha$ -stożek wokół  $e_1$ .

**Fakt 3.21.** Niech  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  będzie dowolnym dyfeomorfizmem oraz  $\Lambda$  będzie domkniętym,  $F$ -niezmienniczym, ograniczonym podzbiorem  $\mathbb{R}^2$ . Niech  $U$  będzie otwartym otoczeniem  $\Lambda$ . Załóżmy, że istnieją parami rozłączne pola stożków  $C^s$  i  $C^u$  dla których:

1.  $\alpha \leq \frac{\pi}{4}$ ,
2.  $DF(C^u(p)) \subset C^u(F(p)); DF^{-1}(C^s(p)) \subset C^s(F^{-1}(p))$ ,
3. jeśli  $v \in C^u(p)$ , to  $|DF(p)v| \geq 2|v|$ ,
4. jeśli  $w \in C^s(p)$ , to  $|DF^{-1}(p)w| \geq 2|w|$ .

Wtedy  $\Lambda$  jest zbiorem hiperbolicznym dyfeomorfizmu  $F$  oraz  $E^u \subset C^u$  i  $E^s \subset C^s$ .

Na zakończenie podajemy jeszcze definicję szczególnej klasy odwzorowań, będących uogólnieniem pojęcia dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a na zbiory hiperboliczne. Zdefiniowane poniżej odwzorowania są tematem licznych prac prowadzonych współcześnie w dziedzinie układów dyskretnych.

**Definicja 3.22** (dyfeomorfizm spełniający Aksjomat A). Niech  $F: U \rightarrow U$  będzie dyfeomorfizmem. Mówimy, że  $F$  jest dyfeomorfizmem spełniającym Aksjomat A, jeśli zbiór łańcuchowo-rekurencyjny  $\Lambda$  odwzorowania  $F$  jest zbiorem hiperbolicznym oraz zbiór punktów okresowych jest gęsty w  $\Lambda$ .

## Bibliografia

- [1] Devaney R. L.: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems Second Edition*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1989.
- [2] Elaydi S. N.: *Discreet Chaos*. Chapman and Hall / CRC, 2000.
- [3] Engelking R., Sieklucki K.: *Wstęp do topologii*. PWN, 1986.
- [4] Hale J., Kocak H.: *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag, 1991.
- [5] Hartman P.: *Ordinary Differential Equations*. John Wiley and Sons, New York, 1964.
- [6] Hirsch M. W., Smale S., Devaney R. L.: *Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos*. Elsevier, 2004.
- [7] Holland M., Luzzatto S.: A new proof of the stable manifold theorem for hyperbolic fixed points on surfaces. *Journal of Difference Equations and Applications*, 11(6), maj 1995.
- [8] Kuratowski K.: *Rachunek różniczkowy i całkowy*. PWN, 1971.
- [9] Mohammed S.-E. A., Scheutzow M. K. R.: The stable manifold theorem for stochastic differential equations. *The Annals of Probability*, 27:615–652, 1998.
- [10] Mohammed S.-E. A., Scheutzow M. K. R.: The stable manifold theorem for nonlinear stochastic systems with memory i: Existence of the semiflow. *Journal of Functional Analysis*, 205:271–305, 1999.
- [11] Mohammed S.-E. A., Zhao H.: The stable manifold theorem for semilinear stochastic evolution equations and stochastic partial differential equations ii: Existence of stable and unstable manifolds, 2002.
- [12] Mostowski A., Stark M.: *Algebra liniowa, wydanie trzecie*. PWN, 1968.
- [13] Perko L.: *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 2001.
- [14] Robinson C.: *Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamics and Chaos Second Edition*. CRC Press, 1999.
- [15] Rudin W.: *Analiza rzeczywista i zespolona*. PWN, 1998.
- [16] Szlenk W.: *Wstęp do teorii gładkich układów dynamicznych*. PWN, 1982.
- [17] Sękowski T. M.: *Zagadnienia matematycznej teorii chaosu*. Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin, 2007.

# Oświadczenie

Ja, niżej podpisany(a) oświadczam, iż przedłożona praca dyplomowa została wykonana przeze mnie samodzielnie, nie narusza praw autorskich, interesów prawnych i materialnych innych osób.

.....

data

.....

podpis