Matematyka jest wszędzie

Witold Bołt

3 stycznia 2006 [draft]

1 Wstęp

Motywacją do napisania tego krótkiego tekstu były rozmowy prowadzone z pewną bliską mi osobą na temat sposobów nauczania matematyki i ogólnie jej sensu. Z pewnością to co tu piszę nie jest ani wyjątkowo odkrywcze ani pewnie wyjątkowo mądre. Nie uważam się też za wielkiego filozofa nauki czy nawet matematyka.

2 A po co mi ta matematyka?

Pytanie zawarte w tytule tej części jest pytaniem powtarzanym setki tysięcy razy przez niezliczone rzesze studentów i uczniów różnych szkół. *A po co mi te logarytmy, całki, granice, funkcje ciągłe i nieciągłe, pochodne?* Pokrótce spróbuję tutaj przedstawić mój punkt widzenia tej sprawy. Niestety jednak chyba nie podam jednej konkretnej odpowiedzi. Chociaż chyba najdokładniejsza odpowiedź jaką da się podać to *po nic* albo *nie wiadomo po co*.

Chciałbym zacząć jednak od zauważenia, że większość problemów z nauką matematyki (czy czegokolwiek innego) to stawianie sobie, na samym początku, pytania: *a po co mi to?* Prawdziwym skarbem i największą wartością matematyki bowiem jest fakt, że jest ona po nic. Matematyka jest oderwana od swoich zastosowań. Albo inaczej – matematykę można stosować w bardzo wielu dziedzinach życia codziennego, naukowego, społecznego – wszędzie. Ale można równie dobrze uczyć się matematyki czy nawet być matematykiem i nigdy z niej nie korzystać „w dosłownym znaczeniu tego słowa". Prawda jest z resztą taka, że znaczna większość ludzi żyjących na świecie nie korzysta z większości wiedzy matematycznej jaką udało im się „złapać" gdzieś tam w szkole. I co tu dużo ukrywać – nic w tym dziwnego nie ma?

Głównym celem nauki matematyki, poza pojedynczymi przypadkami ludzi wyjątkowo uzdolnionych (lub spaczonych), którzy mają w przyszłości zostać wielkimi matematykami, powinno być wyrobienie w uczniach postawy matematycznej, nauczenie myślenia matematycznego, ogólnie – matematycznego podejścia do życia.

2.1 Jak to się zaczęło?

Wyobraźmy sobie przez chwilę, że obserwujemy dziwny gatunek stworzeń zwanych matematykami. Jak żyją? Jaki jest ich sposób poznawania świata i istnienia w tym świecie?

Po pierwsze matematycy nieustannie obserwują swój świat. Rozglądają się – podglądają wszystko i wszystkich. Pierwotni matematycy, z różnych przyczyn, byli też myśliwymi. Generalnie zabijali wszystko co się rusza i potem próbowali to jeść. Po czasie odkryli że niektóre zwierzaki łatwiej zabić a inne trudniej. Jedne smakują lepiej od drugich. Pojawiły się pewne *zależności* i *własności*. Szybko też ktoś pojął (niestety jego nazwisko nie jest znane), że stanowczo lepiej wrócić z polowania z trzema królikami niż z jednym, bo ... trzy króliki to więcej niż jeden. Później ktoś zauważył, że coś niepojętego i tajemniczego łączy ze sobą pojęcia *trzy króliki* i *trzy krowy* i nawet *trzy kamienie*. Co więcej okazało się, że nie tylko lepiej mieć trzy króliki niż jednego, ale też z reguły lepiej mieć trzy krowy niż jedną. Nagle ni z tego ni z owego pojawiła się abstrakcja – trzy oderwało się od królika, krowy, kamienia i okazało się tą samą trójką. Co więcej powstało jedno z pierwszych twierdzeń matematycznych: trzy jest lepsze od jeden. Przy czym słowo *lepsze* szybko zastąpiono słowem *większe*, po tym jak kolejny słynny matematyk, zaobserwował, że wcale nie jest lepiej mieć trzy połamane palce niż jeden (wieść niesie, że poza wyraźnymi zdolnościami matematycznymi, ów matematyk był nieco niezdarny).

W tym samym czasie matematycy, popychani swoim wrodzonym pragnieniem obserwacji świata zaczęli dostrzegać różne *własności* świata w którym żyją. Zaczęto rozpoznawać kształty – niektóre były do siebie podobne: chociażby słońce i przecięty pień drzewa i księżyc. Albo chmury ... właściwie to chmury były podobne do wszystkiego (do chmur jeszcze wrócimy).

Matematycy obserwowali i obserwowali, ale to nie wszystko. Wspomnieliśmy już o tym, że w pewnym momencie pojawiło się coś, co dzisiaj nazywamy abstrakcją. Trójka oderwana od królika. Otóż pewnego dnia, któryś z matematyków, dość odważnie jak na owe czasy, stwierdził że wiele rzeczy można odkryć na podstawie obserwowania samej abstrakcji. Był to przełom. Matematyk mógł siedzieć w jaskini, mazać po ścianie jakimś kawałkiem węgla i na tej podstawie opisywać „coś". Abstrakcja rosła w siłę. Dwa jest większe od jeden, ale mniejsze od trzech. Udało się i w dodatku żaden królik nie stracił życia aby potwierdzić ten fakt. Oczywiście pojawiło się wtedy wiele ciekawszych twierdzeń, na których opisanie nie bardzo mamy czas, bo ... bo chwile później zaobserwowano coś dużo bardziej niesamowitego.

To że matematyk siedział w jaskini i pisał na nie wiele by się zdało. Ówcześni tradycjonaliści zjedli by go szybko zamiast królików, które mógłbym upolować w czasie gdy siedział w jaskini. „Coś" się jednak okazało, „coś" czego matematycy sami nie wymyślili, „coś" co pozostało zagadką przez całą historię świata matematyków. Abstrakcja, która objawiała się matematykom pewnego dnia, dała się ponownie stosować! Można było dokonać obserwacji, następnie wyciągnąć z tego abstrakcyjne wnioski, połączyć je z innymi abstrakcyjnymi wnioskami i innymi obserwacjami świata i następnie zastosować ponownie w świecie. I (co najważniejsze) okazało się, że to działa!

Czas mijał a matematycy wiedzieli coraz więcej. Zaczęto dzielić wiedzę matematyczną na działy, pojawiały się zaczątki kolejnej, po abstrakcji, wielkiej „broni" matematycznej – *formalizm*. Formalizm to coś bardzo związanego z abstrakcją. Chodziło m.in. o to aby swoje obserwacje i wnioski z nich (i wnioski z wniosków itd) zapisywać w sposób, który byłby zrozumiały też dla innych matematyków. Matematycy bowiem, któregoś dnia nauczyli się pracować w zespołach naukowych. Jednak samo zapisanie nie było jeszcze tym o co chodziło matematykom. Bardzo szybko okazało się, że formalizm sam w sobie nadaje się do badania. Co ważniejsze, okazało się, że przyjęcie dobrych nazw, dobrych oznaczeń, dobrych sposób przedstawiania swoich myśli może prowadzić wręcz do szybkiego i łatwego odkrycia kolejnych faktów. Mniej więcej wówczas (lub nieco wcześniej) matematycy zaczęli nazywać swoje osiągnięcia. Pojawiły się w ich języku takie terminy jak:

- pojęcie pierwotne – czyli coś co każdy wie czym jest, ale nikt nie wie jak to powiedzieć i co ważniejsze – powiedzenie co to jest nic nie daje a zazwyczaj nawet wiele psuje (takim pojęciem mogła być kiedyś liczba albo nawet królik – jeśli któryś matematyk badał akurat teorię królików);

- definicja – opis tego co matematyk wymyślił, np. *bycie większym* (lub jak to powiedziałby bardziej nam współczesny matematyk – relacja bycia większym, lub relacja porządkująca);

- aksjomat – to coś co zachodzi i koniec – królik jest smaczny – trzeba to przyjąć (ewentualnie można przyjąć przeciwnie, że królik nie jest smaczny, tak czy inaczej jedną z tych rzeczy warto przyjąć, żeby potem łatwiej dało się budować teorię królików);

- twierdzenie, fakt, wniosek – opis zależności między wcześniej wprowadzonymi definicjami, pojęciami, aksjomatami, a także wnioski z wcześniej zauważonych czy wymyślonych twierdzeń – ogólnie wszystko to co „wynika" z tego co wiedzieliśmy wcześniej.

Okazało się, że w późniejszej pracy matematyków, która skupiała się na wynajdywaniu, odgadywaniu, poznawaniu czy też wymyślaniu nowych twierdzeń było *uzasadnienie*, które dzisiaj nazywamy *dowodem*.

Dowód matematyczny musi spełniać kilka prostych warunków. Dowód musi być takim „opowiadaniem", które na podstawie wcześniej udowodnionych twierdzeń, a także na podstawie definicji i przyjętych aksjomatów doprowadza nas do udowadnianego twierdzenia (współcześni matematycy mówią, że dowód jest skończonym ciągiem formuł, które powstają z aksjomatów oraz z innych (wcześniejszych) elementów tego ciągu za pomocą reguł wnioskowania, przy czym ostatnim wyrazem ciągu musi być udowadniane twierdzenie). Wszystko brzmi trochę jak masło maślane – konsekwencje są jednak porażające. Okazuje się, że jeśli już jakiś matematyki poda jakieś twierdzenie wraz z *poprawnym* dowodem to twierdzenie to jest absolutnie niezaprzeczalne. Jedyną sytuacją, gdy twierdzenie nie zachodzi może być sytuacja gdy dowód pomija jakiś szczególny przypadek – ale wtedy oczywiście nie jest on poprawny.

Poza tym wszystkim do rozwoju matematyki przyłożyło się jeszcze jedno wrodzone pragnienie matematyków – pragnienie uogólnienia. Każdy matematyk próbuje uogólnić każde twierdzenie. Jeśli coś wiadomo o królikach, to może to samo, albo coś bardzo podobnego da się udowodnić dla wszystkich zwierzątek skaczących, albo futrzanych, albo ogólnie zwierzątek? Oczywiście nie chodzi tu o głupie i bezpodstawne uogólnianie. Matematyk nie jest głupi. Tu chodzi o ... dowody i o pytanie – „czy da się udowodnić uogólnioną wersję tego twierdzenia?", „czy da się zrezygnować z któregoś założenia?".

Czas mija. Matematyka się rozwija. Staje się coraz bardziej skomplikowana i złożona. Na tyle złożona, że matematycy stwierdzają, że gdy zajmują się matematyką nie mają czasu na nic innego. Treści twierdzeń i definicji stają się coraz bardziej abstrakcyjne i coraz dalej odbiegają od królików, kamieni, drzew. Korzystając z podstawowej własności świata „opowiadań" przenieśmy się w czasie do czasów nam współczesnych.

Dzisiaj matematycy badają najróżniejsze „dziwaczne" rzeczy jak fraktale, przestrzenie topologiczne, funkcje rzeczywiste, grupy algebraiczne i mnóstwo innych rzeczy. Obiecałem wcześniej, że wrócimy jeszcze do chmur.

Okazuje się bowiem, że pomijając rosnący poziom skomplikowania matematyki, coraz wyższy poziom abstrakcji i dziwność nazw, nie wiele się zmieniło. Matematyka wciąż z jednej strony czerpie wiele ze świata, a z drugiej stara się ten świat opisywać. Przykładem niech będą fraktale. Fraktale to bardzo dziwne figury geometryczne. Powstają zupełnie inaczej niż te „zwykłe” znane powszechnie (takie jak kółko, kwadrat, linia). Najkrócej mówiąc fraktale odpowiadają jakiemuś procesowi lub jakiejś instrukcji budowania. Na przykład: rysujemy trójkąt równoboczny, każdy z jego boków dzielimy na pół i otrzymane punkty łączymy odcinkami. Duży trójkąt podzieliliśmy na cztery mniejsze – przy czym jeden (ten „środkowy”) jest odwrócony „do góry nogami”. Następnie opisany wcześniej mechanizm powtarzamy dla każdego z tych trzech (pomijamy środkowy) trójkątów. Dostajemy kolejne małe trójkąciki. Tą procedurę powtarzamy ... w nieskończoność. Oto przykład bardzo prostego fraktala. Cóż w tym nadzwyczajnego? Niby nic – jednak matematycy zauważyli w tym coś wyjątkowego i siedli w swojej „jaskini” i zaczęli myśleć. Jeden z najwybitniejszych matematyków zajmujących się fraktalami Benoit Mandelbrot, twierdzi że właśnie geometria fraktalna pozwoli w sposób matematyczny opisać kształty które przyjmują na przykład chmury, które nie są ani kwadratami, ani kółkami, ani kulami tylko ... fraktalami. Okazuje się, że bardzo wiele „kształtów” występujących w naturze (takich jak koryta rzek, system żył i tętnic w okolicach serca itp) daje się opisać za pomocą fraktali właśnie. Niestety nie mam już czasu pisać więcej o fraktalach. Zainteresowanych odsyłam do internetu, gdzie można znaleźć mnóstwo informacji o matematyce i fraktalach właśnie.

2.2 Co dalej?

Czas teraz na kilka luźnych wniosków. Można się z nimi zgodzić bądź nie. Zapewne nie wszystko co chciałem udało się przedstawić tak jak powinno to być. Chodziło jednak głównie o to, aby uświadomić sobie kilka podstawowych rzeczy. Po pierwsze: matematyka wyrosła z obserwacji świata. Po drugie: matematyka zyskała swoją siłę dzięki (być może pozornemu) oderwaniu się od wszelkiego zastosowania. Matematyka ma silny związek z abstrakcją. Po trzecie: jakkolwiek matematycy by się nie starali, ta ich abstrakcja przydaje się do opisywania rzeczy, o których sami matematycy czasem mają mało pojęcia. I co gorsza robi to zaskakująco dobrze! Po czwarte w końcu: matematyka to nie liczenie. Jak to ktoś powiedział kiedyś: matematyk to nie kalkulator. Matematyka to raczej budowanie w określony sposób swoich myśli. Układanie ich w jedno dużo „coś”. Wyciąganie wniosków z wcześniej zdobytych informacji. Kojarzenie faktów... i dowodzenie. Matematyka to także rozwiązywanie problemów. Chociaż może nasza historia o tym zbyt dużo nie mówiła. Wyobraźmy sobie naszych początkujących matematyków, którzy po wynalezieniu relacji porządkujących i liczb naturalnych oraz kilku innych abstrakcyjnych tworów zaczynają zastanawiać się jak to zrobić aby polować lepiej, aby mieć więcej jedzenia, lepsze skórzane ubrania itd. Tworzą strategie, plany, liczą zyski, straty, szacują swoje szanse. Może lepiej nie atakować bizona albo mamuta bo nas stratuje – może lepiej napadać na króliki. A może jeśli liczba atakujących będzie odpowiednio duża opłaca się jednak zabić mamuta? Matematyka.

Oczywiście dzisiaj wszystkie te rozważania wydają się nam banalne. Każde dziecko je zrozumie. Każde? Czy tylko te które uczą się matematyki? O nauczaniu słów kilka jeszcze się pojawi. Chciałbym jednak najpierw skupić się jeszcze na dwóch przykładach pewnych problemów, ich rozwiązań i tego co z tych rozwiązań wynikło.

2.3 Przykłady

Liczby pierwsze Teraz natomiast chciałbym opowiedzieć o dwóch innych przypadkach zastosowania w praktyce dziwactw matematyków. Dawno temu, gdy nie było jeszcze komputerów, matematycy prześcigali się w wymyślaniu bardzo dużych liczb które były *pierwsze*. Liczba pierwsza to taka liczba całkowita, która dzieli się tylko przez siebie i przez 1. Liczby takie jak: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ są liczbami pierwszymi, natomiast liczby takie jak $4, 6, 8, 9, 10$ pierwszymi nie są. Najprostszym sposobem sprawdzenia czy jakaś liczba jest pierwsza czy nie jest sprawdzenie czy dzieli się bez reszty przez jakąś liczbę mniejszą od siebie, ale większą od 1. Ten sposób wymyślił już starożytny grek Eratostenes. Niestety dla liczb dużych, naprawdę dużych jest to sporo liczenia. Zabawa wydawała się więc całkiem ciekawa. Znaleźć jakąś dużą liczbę (większą niż kolega) i udowodnić, że jest pierwsza (najlepiej jeszcze bez potrzeby wykonywania milionów dzieleń na kartce). Matematycy lubią się bawić, więc się bawili. Co więcej, dużo radości sprawiał im fakt, że wyniki tej zabawy wydają się całkowicie, zupełnie i definitywnie pozbawione jakiegokolwiek sensu i przydatności. Jak zwykle w opowiadaniach ... mijał czas. I nagle, pewnego dnia inny matematyk wpadł na szalony pomysł, że liczby te mogą się do czegoś przydać. Dzisiaj tak naprawdę trudno sobie wyobrazić świat bez tych liczb, chociaż większość z nas zupełnie o tym nie wie. Są one bowiem podstawą wielu algorytmów szyfrowania danych, które umożliwiają chociażby funkcjonowanie internetu: dokonywanie zakupów czy transakcji bankowych, czy chociażby możliwość transmisji rozmów przez telefon komórkowy, tak żeby sąsiad nie podsłuchiwał. Tak oto od zabawy matematyków przeszliśmy do podstawowego narzędzi światowych armii oraz technologii teleinformatycznych.

Pociąg Drugi przykład będzie mniej rewolucyjny i wyszukany. Chciałbym jednak rozwiązać chociaż jedno zadanie w ramach tego tekstu. Oto treść zadania.

Zadanie 1. Pociąg w ciągu 4 godzin przejechał drogę 320 km. Udowodnij, że w ciągu godziny pociąg przejechał 80 km.

W zadaniu chodzi o to, aby udowodnić, że w czterogodzinnym przedziale czasu, powiedzmy od 10:00 do 14:00 znajdziemy przynajmniej jeden taki moment, na przykład 11:54, że w czasie od 11:54 do 12:54 pociąg przejdzie dokładnie 80 km. O pociągu nie wiemy nic. Nie wiemy, czy na przykład nie miał postoju od 11:00 do 13:30. Nie wiemy czy miał stałą czy zmienną prędkość. Nie wiemy czy zmieniał kierunek swojego ruchu, czy stawał na stacjach czy nie. Wiemy tylko tyle ile podano w treści. Okazuje się, że bez względu na to wszystko czego nie wiemy, możemy ponad wszelką wątpliwość, udowodnić, że na pewno taki moment daje się znaleźć. Oczywiście nie jesteśmy w stanie dokładnie powiedzieć kiedy w ciągu tych czterech godzin ten moment się zdarzy i czy będzie tylko jeden taka godzina czy więcej. (Pociąg mógł jechać przecież z prędkością dokładnie $80 km/h$ i wtedy w dowolnej godzinie przebywa $80 km$. Mógł jednak stać przez 3 godziny a w ciągu czwartej poruszać się z zawrotną prędkością $320 km/h$. Nic to nam jednak nie przeszkadza. W obu tych sytuacjach da się podać taki moment od którego, przez godzinę, pociąg przebędzie dokładnie $80 km$). Poniżej zamieszczam czysto matematyczne rozwiązanie tego problemu:

Rozwiązanie: Niech funkcja $f\colon [0,4] \to [0,320]$, przypisuje czasowi t liczbę kilometrów które pociąg przebył w czasie t godzin od startu. Oczywiście f jest funkcją niemalejącą, $f(0) = 0$ oraz $f(4) = 320$. Funkcja f jest również funkcją ciągłą. Zdefiniujmy teraz inną funkcję $g\colon [0,3] \to \mathbb{R}$, daną wzorem:

$$g(t) = f(t+1) - f(t).$$

Funkcja g jest dobrze określona, dla żadnego t z przedziału $[0,3]$ nie będzie problemu z wyliczeniem wartości funkcji g. Funkcja g „mówi” nam ile kilometrów przejedzie pociąga w ciągu jednej godziny poczynając od czasu t. Ze względu na ciągłość funkcji f, funkcja g również jest ciągła.

Wystarczy pokazać, że dla pewnego $t \in [0,3]$ zachodzi $g(t) = 80$. Aby to pokazać, będziemy chcieli skorzystać z tego, że funkcja g posiada własność Darboux (czyt. darbu). Własność ta mówi, że jeśli funkcja ciągła określona jest na zbiorze spójnym (czyli takim który ma „jeden kawałek” – przedział $[0,3]$ jest „jedynym kawałkiem”, a zbiór $[0,3] \cup [5,7]$ już nie) i dla pewnych argumentów przyjmuje jakieś dwie różne wartości, to na pewno przyjmuje też wszystkie wartości pośrednie. (Fakt ten jest dość oczywisty jeśli rozpatrujemy to na konkretnych przykładach – jeśli mierzymy temperaturę powietrza i rano wyjdzie nam $15°$ a w południe $20°$ to wiemy, że gdzieś tam w czasie od rana do południa był moment, że temperatura wynosiła $17.5°, 19.9°$ itd. Matematycy to zauważyli i stwierdzili że jest to ogólna własność funkcji ciągłych.) Musimy więc pokazać, że dla jakiegoś t wartość $g(t)$ jest większa od 80, oraz że dla jakiegoś (innego) t wartość ta jest mniejsza od 80.

Załóżmy więc najpierw, że dla każdego t z przedziału $[0,3]$ wartość $g(t)$ jest mniejsza od 80. Rozważmy sumę:

$$g(3) + g(2) + g(1) + g(0) =$$

która z definicji funkcji g równa jest:

$$= f(4) - f(3) + f(3) - f(2) + f(2) - f(1) + f(1) - f(0) = f(4) - f(0).$$

Z definicji funkcji f wiemy $f(0) = 0$, mamy więc, że:

$$g(3) + g(2) + g(1) + g(0) = f(4).$$

Wiemy również, że $f(4) = 320$, no ale założyliśmy, że dla każdego $t \in [0,3]$ wartość $g(t)$ jest mniejsza od 80, czyli suma $g(3) + g(2) + g(1) + g(0)$ nie mogłaby wtedy równać się 320. Założenie, że dla wszystkich t $g(t) < 80$ prowadzi do sprzeczności, czyli musi istnieć przynajmniej jedno t dla którego $g(t) \geqslant 80$.

Załóżmy więc, że dla wszystkich t wartość $g(t)$ jest większa od 80. Rozważmy tą samą sumę co poprzednio. Z jednej strony $g(3) + g(2) + g(1) + g(0)$ musi równać się 320, z drugiej, jeśli dla każdego t $g(t) > 80$ to na pewno ta suma jest większa od 320 (bo mamy sumę czterech liczb, z których każda jest większa od 80). Założenie, że dla wszystkich t $g(t) > 80$ również prowadzi do sprzeczności. Mamy stąd, że musi istnieć przynajmniej jeden punkt w którym $g(t) \leqslant 80$.

W ten sposób udowodniliśmy, że istnieją dwa punkty – w jednym wartość funkcji g jest mniejsza lub równa 80, w drugim jest większa lub równa 80. Z własności Darboux wiemy więc, że musi istnieć punkt pośredni, w którym wartość wynosi dokładnie 80, co kończy dowód.

Zadanie, które z początku wydawało się dość proste i prozaiczne, poprowadziło nas do rozważania dość dziwnych i nietypowych rzeczy – zdefiniowaliśmy dwie funkcje, powiedzieliśmy o zbiorach spójnych, funkcjach ciągłych i własności Darboux. To dość dużo. (Zadanie pochodzi ze zbioru zadań dla studentów II roku matematyki.) Jednak, o ile jeszcze cokolwiek rozumiesz drogi czytelniku, przedstawienie tu tego rozwiązania. Po pierwsze zauważmy, że rozwiązanie jest niepodważalne. Jakikolwiek pomysł na wymyślenie pociągu których w jakiś magiczny sposób nie spełnił by warunków zadania skazany jest na niepowodzenie. Mogą mijać lata, zmieniać się koncepcje, poglądy, pociągi ... rozwiązanie pozostanie dobre. Po drugie – mogli byśmy nie wiedzieć nawet jak wygląda pociąg aby rozwiązać to zadanie. W sumie to nawet nie wiemy na dobrą sprawę o jaki pociąg chodzi. Mogli byśmy w ogóle nie wiedzieć cóż to jest ten pociąg. Wystarczy wiedzieć, że jeździ. I właśnie o to chodzi w matematyce. Rozwiązaliśmy problem. Podaliśmy jasną odpowiedź. Odpowiedź jest niepodważalna, a rozwiązanie – przynajmniej dla osób które znają wszystkie użyte fakty i definicje, jest zrozumiałe.

2.4 Podsumowanie

Chciałem w tym wielkim wywodzie powiedzieć tak naprawdę jedno zdanie. Matematyka jest bardzo ważne, piękna i ciekawa – matematyka jest wszędzie. Choć na pewno w sensie matematycznym ani jakimkolwiek innym nie udowodniłem tego tutaj. Ponadto na pewno trudno Ci drogi czytelniku przyjąć te słowa bezkrytycznie (no chyba że studiujesz matematykę), bo ... chodziłeś zapewne do szkoły.

3 Nauczanie matematyki – czyli o tym co nie wyszło matematykom

Odkąd pamiętam z nauką matematyki był problem. Gdy byłem dzieckiem bardzo małym problem może nie był jeszcze za wielki. Ale był. Z matematyki były prace domowe, które trzeba było rozwiązywać. Nikt nie lubi prac domowych. Potem zaczęło się gorzej. Bo matematyka była coraz trudniejsza, a ja coraz bardziej leniwy. Nie miałem wielkich problemów z nauką tego przedmiotu, ale ... jak to większości, nie bardzo mi się chciało. Potem gdy już zacząłem choć trochę „na poważnie" umieć matematykę, problem zmienił swój charakter. Okazało się bowiem, że ludzie wokół mnie mają z tą matematyką mnóstwo problemów. Uczniowie (moi i nie moi) bali się sprawdzianów i zaliczeń. Narzekali w kółko: „a po co mi to". Znajomi nauczyciele czy wykładowcy narzekali, że uczniowie i studenci nic nie umieją i „jak tu uczyć takich baranów".

Z matematyką był problem. I jest nadal. Chociaż zdarzają się zarówno dobrzy uczniowie jak i dobrzy nauczyciele, ogólnie nie jest to zbyt popularna dziedzina wiedzy. Nie dość, że wszyscy narzekają to jeszcze prawie nikt nie wie jak się uczyć i jak uczyć. Albo może nieco inaczej. Wymyślono pewną metodę.

3.1 Błędne koło

W pierwszym rozdziale, pisałem o tym jaka to matematyka jest wyjątkowo ciekawa i przydatna. Jak to kształtuje twórcze myślenie, rozwiązywanie problemów itd. Potem napisałem, że pewnie mi nie wierzysz. Dlaczego? Bo matematyka którą wynosimy ze szkoły wygląda „nieco" inaczej.

Oczywiście pojawiają się zadania do rozwiązania. Pojawia się jakaś tam abstrakcja (bo nikt nie wie o czym mowa). Pojawiają się też „sposoby rozwiązania". Brakuje jednak często myślenia.

Pojawia się tu zjawisko „błędnego koła". Skąd się ono bierze. Postawmy się w sytuacji nauczyciela. Zaczyna pracę i ma wizję – moje lekcje będą inne. Będziemy twórczo myśleć nad ciekawymi problemami. Zaczyna te lekcje. Prowadzi jedną, drugą, trzecią – opowiada o kilku rzeczach na raz, sypie anegdoty i ciekawostki – „zachęca uczniów do tematu”. Uczniowie słuchają (albo i nie) nieco zdziwieni. Potem przychodzi czas na pierwszy sprawdzian ... (szok) ... i od następnej lekcji ton się zmienia: „zadanie pierwsze: policz $\log_7 49$”. Następny sprawdzian ... i co? Jest dużo lepiej. Uczniowie nie muszą za dużo myśleć. Mają wzory, mają gotowe schematy – biorą kartkę, w domu uczą się jej na pamięć, na sprawdzianie stosują i gra. Można wpisać ładne oceny na koniec roku i wszystko jakoś idzie.

Ostatnio rozmawiałem z pewnym wykładowcą, który prowadzi przedmiot zbliżony do matematyki – polegający na stosowaniu podejścia matematycznego do świata finansów i ekonomii. On dziwił się, dlaczego matematycy na ćwiczeniach na jego wydziale robią takie „głupie” zadania w stylu: „policz wyznacznik macierzy 3×3”. „Przecież to się liczy na komputerze”. Pewnie ma dużo racji – tak naprawdę wszystko da się policzyć na komputerze. Ale znowu błędne koło. Liczenie jest proste. Zazwyczaj głównym problemem jest *co mam policzyć*. Tylko, że kto zaliczyłby matematykę na zarządzaniu, gdyby trzeba było cały czas tam myśleć? Błędne koło.

Dlaczego koło? To chyba zła nazwa. Ten proces gdzieś tam musi mieć swój początek. Zapewne (nie chcę tutaj nikogo oskarżać) dzieje się to w pierwszych klasach szkoły podstawowej. To moja osobista teoria, ale być może w pewnym momencie u większości uczniów dochodzi do swoistej blokady. Być może dla większości równania liniowe z jedną niewiadomą stanowią zbyt duży poziom abstrakcji... i zamykają się. To zamknięcie trwa potem całe lata, aż do chwili gdy wreszcie matematyka znika. Owszem można się dalej uczyć, zapamiętać, zdać i zapomnieć – ale zrozumieć już trudno.

3.2 Czy coś da się zrobić?

Perspektywy nie są zbyt dobre. W szkołach coraz mniej czasu poświęca się na nauki ścisłe (z roku na rok jest coraz mniej godzin i to jest fakt). Matura i wszelkie egzaminy z matematyki mają wielu przeciwników, bo oczywiście to oznacza wiele niezaliczeń. A przecież osoby które decydują o kształcie edukacji to byli uczniowie i ... zazwyczaj wcale nie matematycy z wykształcenia (więc swoje wspomnienia mają też nie najlepsze).

Ale na pewno wiele da się zrobić. Być może należałoby w którymś momencie nauki potraktować edukację matematyczną bardziej indywidualnie – tzn. zrobić np. trzy poziomy zaawansowania i dzielić uczniów, niezależnie od przynależności do klasy, na grupy matematyczne. To, wraz z zwiększeniem liczby godzin i wprowadzeniem obowiązku matury z matematyki, moim zdaniem pomogło by wiele. A skutki takich zmian widać byłoby nie tylko w poziomie samej matematyki jako takiej. Jeszcze raz wróćmy do idei – matematyka to głównie sposób myślenia i patrzenia na świat.

4 Zakończenie

Cóż mogę napisać na koniec. Warto, niezależnie od wieku i zawodu uczyć się matematyki – tej „prawdziwej”, która jest wszędzie. Warto ją umieć. Warto przekazywać i kształtować w swoich dzieciach i wychowankach zamiłowanie do matematyki (które wcale nie wyklucza zapatrywań humanistycznych – większość słynnych matematyków była również filozofami, teologami, pisarzami, artystami itd). Poza tym warto korzystać z dorobku matematyków. Żyjemy w bardzo uprzywilejowanych czasach w historii świata. Żyjemy w erze ogólnie dostępnej wiedzy ... informacji. Internet jest pełen również matematyki!

A Coś jeszcze o matematykach – nie do końca poważnie

Oto kilka historii na zakończenie. Matematyk z fizykiem wyjechali na konferencję naukową i spali w jednym pokoju hotelowym. W nocy wybucha pożar. Obaj budzą się. Fizyk wyskakuje z łóżka, chwyta gaśnicę, kopem otwiera drzwi i wybiega do wyjścia ewakuacyjnego torując sobie drogę gaśnicą. A matematyk ... zasypia dalej spokojnie – „problem ma rozwiązanie".

Kilka osób leciało w balonie i zabłądzili. Nagle widzą że na polu pod nimi idzie jakiś człowiek. Krzyczą więc do niego: – Gdzie jesteśmy?! Człowiek na to: – W balonie. Pasażerów balonu „zatkało". Po chwili jednak jeden zrezygnowanym głosem mówi: – To matematyk. – Dlaczego? – pytają inni. – To proste. Udzielił bardzo precyzyjną odpowiedź, która w dodatku jest niepodważalna i ... zupełnie bezużyteczna.

Gdzieś daleko daleko, odbywały się dziwne zawody. Zadaniem uczestników było, nie używając narzędzi wyjąc z deski dwa wbite gwoździe. Jeden gwóźdź był wbity do połowy, a drugi całkowicie. Do zawodów stanęli różni ludzie wśród nich był też matematyk. Jego zachowanie zdziwiło wszystkich. Strasznie się namęczył, tracąc wszystkie paznokcie i kilka zębów nad wyciągnięciem gwoździa wbitego całkowicie. Wyciągnął. A następnie ... zadowolony wbił drugi gwóźdź do końca i powiedział: – No to sprowadziłem problem do problemu już wcześniej rozważanego.

Zobacz też:
`http://meteor2017.fm.interia.pl/teksty/dowcipy_matematyczne.html`,
`http://math.one.pl/bajka.php`,
`http://psyborg.rpg.pl/fun.php?t=grafy.inc`,
`http://gamma.im.uj.edu.pl/complex2001/cd2005mat/mat/ciekawostki/studenci/ra/rozm_abs.htm`.